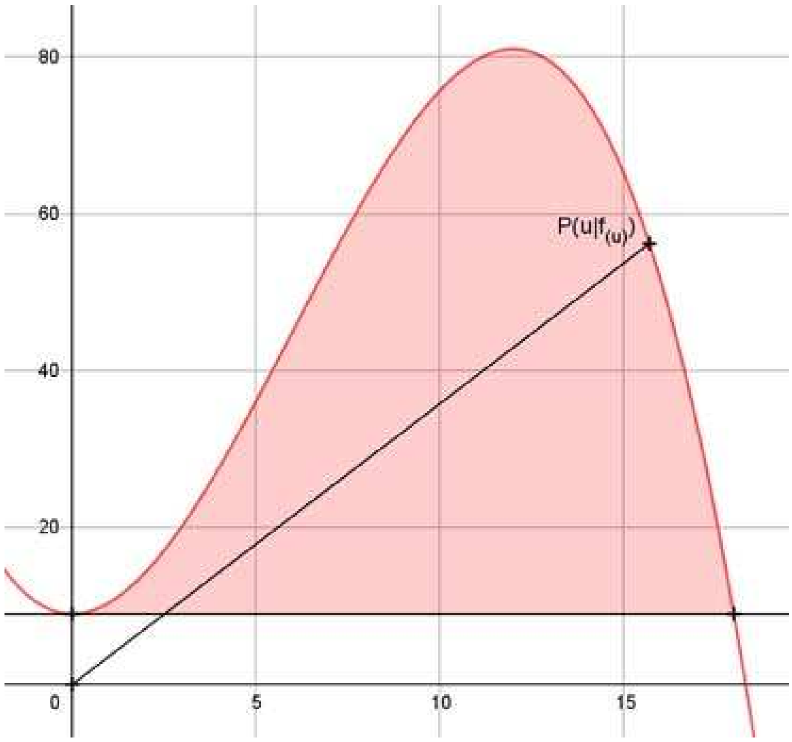
Integral Aufgabe 211

Berechnen Sie den Flächeninhalt A, der von $f_{(x)} = (-1/12)x^3 + 1{,}5x^2 + 9$ und der Tangente in (0|9) an f(x) für $x \geq 0$ begrenzt wird.
Wie groß ist der maximale Abstand a eines Punktes auf $f_{(x)}$ vom Punkt (0|0)?



Die Tangente an $f_{(x)}$ im Punkt (0|9) hat die Gleichung y = 9.

Schnittpunkte:

$$-\frac{1}{12}x^3 + 1{,}5x^2 + 9 - 9 = -\frac{1}{12}x^3 + 1{,}5x^2$$

$$-\frac{1}{12}x^3 + 1{,}5x^2 = 0$$

$$-\frac{1}{12}x^2(x - 18) = 0$$

$$-\frac{1}{12}x^2 = 0 \quad |*(-12)$$

$$x^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$$

$x_{1,2} = 0$ doppelte Nullstelle, Berührpunkt

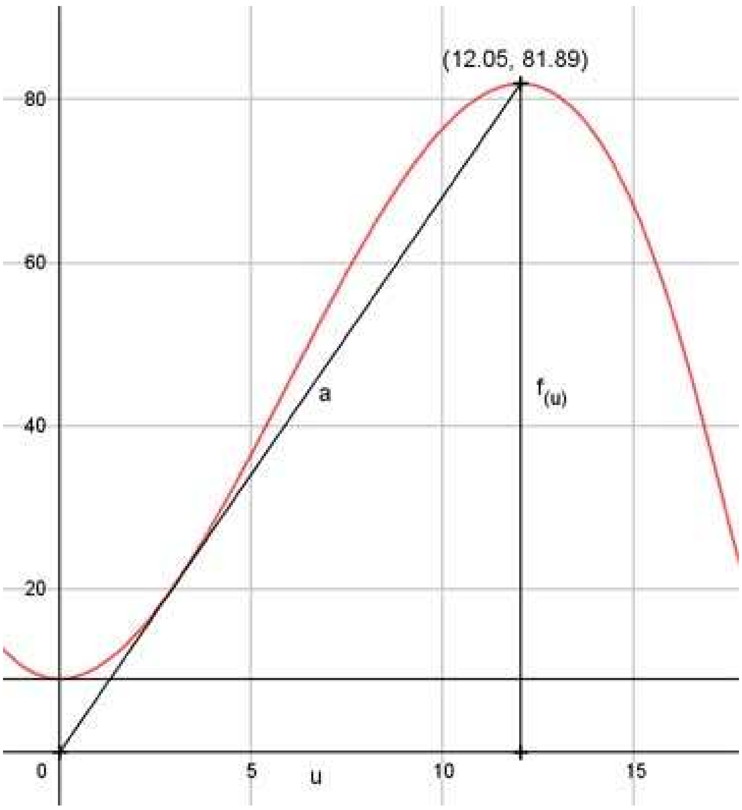
$x - 18 = 0 \;|+18$

$x_3 = 18$

$$A = \int_0^{18} \left(-\frac{1}{12}x^3 + 1{,}5x^2\right)dx = \left|-\frac{x^4}{48} + 0{,}5x^3\right|_0^{18}$$

A = $|729|$ = **729**

Maximaler Abstand:



Satz von Pythagoras:

$$a_{(u)} = \sqrt{u^2 + f_u^2} = \sqrt{u^2 + \left(-\frac{1}{12}x^3 + 1{,}5x^2 + 9\right)^2}$$

Mit dem Hilfsmittel GeoGebra ergibt sich:

$$a_{max} = \sqrt{12{,}05^2 + 81{,}89^2} = \mathbf{82{,}77}$$

Ohne Hilfsmittel:

$$\left(-\frac{1}{12}u^3 + 1,5u^2 + 9\right)^2 = \frac{1}{144}u^6 - \frac{1}{4}u^5 + 2,25u^4 - 1,5u^3 + 27u^2 + 81$$

$$a_{(u)} = \sqrt{\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81}$$

Kettenregel:

$$a'_{(u)} = \frac{0,5 * \left(\frac{1}{24}u^5 - 1,25u^4 + 9u^3 - 4,5u^2 + 56u\right)}{\sqrt{\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81}}$$

Quotientenregel:

$$u' = 0,5\left(\frac{5}{24}u^4 - 5u^3 + 27u^2 - 9u + 56\right)$$

$$v' = \frac{0,5 * \left(\frac{1}{24}u^5 - 1,25u^4 + 9u^3 - 4,5u^2 + 56u\right)}{\sqrt{\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81}}$$

$$a''_{(u)} = \frac{0,5\left(\frac{5}{24}u^4 - 5u^3 + 27u^2 - 9u + 56\right) * \sqrt{\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81} - \frac{0,5 * \left(\frac{1}{24}u^5 - 1,25u^4 + 9u^3 - 4,5u^2 + 56u\right)}{\sqrt{\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81}} * 0,5 * \left(\frac{1}{24}u^5 - 1,25u^4 + 9u^3 - 4,5u^2 + 56u\right)}{\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81}$$

$$a''(u) = \frac{0,5\left(\frac{5}{24}u^4 - 5u^3 + 27u^2 - 9u + 56\right) * \left(\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81\right) -}{\left(\frac{1}{144}u^6-\frac{1}{4}u^5+2,25u^4-1,5u^3+28u^2+81\right)^{3/2}}$$

$$- [0{,}5 * (\frac{1}{24}u^5 - 1{,}25u^4 + 9u^3 - 4{,}5u^2 + 56u)]^2$$

Wertetabelle für $a'_{(u)}$:

u	10	11	12	13
a'	5,01	2,86	0,15	-3

Vorzeichenwechsel zwischen 12 und 13, gewählt $u_0 = 12$

Newtonsches Näherungsverfahren:

$$u_1 = u_0 - \frac{a'(u_0)}{a''(u_0)}$$

$$a''_{(12)} = \frac{-242 * 6705 + 1{,}225}{549032{,}65} = - 2{,}955$$

$$u_1 = 12 - \frac{0{,}15}{-2{,}955} = 12{,}05$$ und daraus ergibt sich $f_{(u)}$ zu 81,89

und **a_{max} zu 82,77**