Integral Aufgabe 227

Eine ganzrationale Funktion $f_{(x)}$ 3. Grades hat einen Berührpunkt in (0|0). Die Tangente im Punkt (6|0) an $f_{(x)}$ hat einen Steigungswinkel von 45°. Berechnen Sie den Flächeninhalt A, der von $f_{(x)}$ und der Tangente begrenzt wird.

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$f_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'_{(x)} = 3ax^2 + 2bx + c$

Hat in (0|0) einen Berührpunkt:

$f_{(0)} = 0 \text{ --> } d = 0$

$f'_{(0)} = 0 \text{ --> } c = 0$

Die Tangente im Punkt (6|0) an $f_{(x)}$ hat einen Steigungswinkel von 45°:

$\tan 45° = 1$

$f_{(6)} = 0$

$216a + 36b = 0 \quad (1)$

$f'_{(6)} = 1$

$108a + 12b = 1 \quad (2)$

(1) + (2) * (-3)

$$\begin{array}{r} 216a + 36b = 0 \\ -324a - 36b = -3 \\ \hline -108a = -3 \;|:(-108) \end{array}$$

$$a = \frac{1}{36}$$

In (1) eingesetzt:

$$\frac{216}{36} + 36b = 0 \;|-6$$

$36b = -6 \quad |:36$

$$b = -\frac{1}{6}$$

$$f_{(x)} = \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{6}$$

Die Tangente an $f_{(x)}$ hat im Punkt (6|0) einen Steigungswinkel von 45°:

$y_T = m_T * x + b$

$m_T = \tan 45° = 1$

Punktkoordinaten in y_T eingesetzt:

$0 = 6 + b \quad |-6$

$b = -6$

$y_T = x - 6$

Schnittpunkte:

$$\frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{6} - x + 6 = 0 \quad |*36$$

$x^3 - 6x^2 - 36x + 216 = 0$

Wegen (6|0) Punkt auf $f_{(x)}$ und y_T:

Polynomdivision:

```
   x³ - 6x² - 36x + 216 : x - 6 = x² - 36
-(x³ - 6x²)
-------------
            -36x + 216
          -(-36x + 216)
          -----------------
                       0
```

$x^2 - 36 = 0 \quad |+36$

$x^2 = 36 \quad |\sqrt{}$

$x_{2,3} = \pm 6$

$$A = \int_{-6}^{6}\left(\frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{6} - x + 6\right)dx$$

$$A = \left|\frac{x^4}{144} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{2} + 6x\right|_{-6}^{6}$$

$A = |15 - (- 33)|$

A = 48