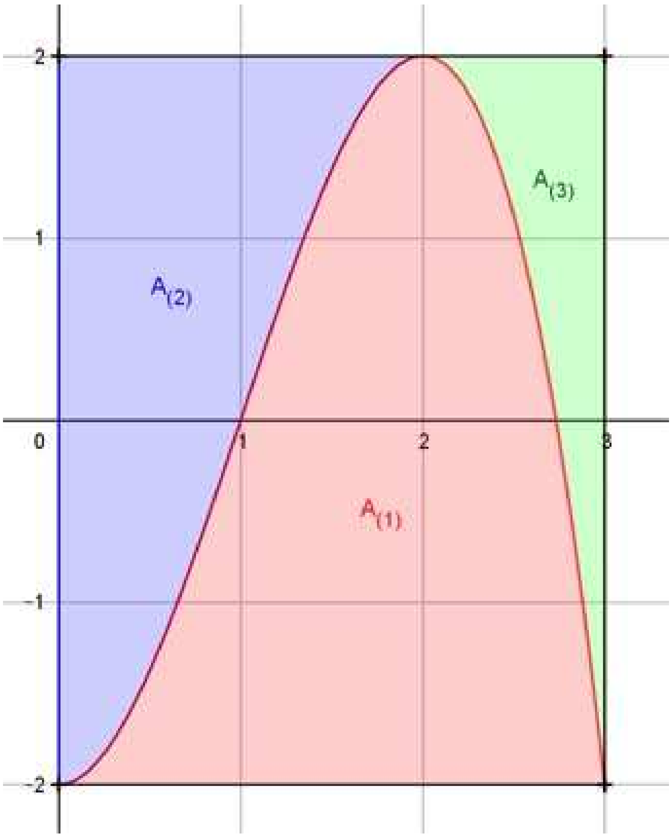
Integral Aufgabe 231

Berechnen Sie die Flächeninhalte der Teilflächen, in die das Rechteck mit $0 \leqq x \leqq 3$ und $-2 \leqq y \leqq 2$ durch die ganzrationale Funktion $f_{(x)}$ 3. Grades geteilt wird. $f_{(x)}$ hat einen Wendepunkt in (1|0) und ein Minimum bei (0|-2).



Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$f_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'_{(x)} = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''_{(x)} = 6ax + 2b$

Wendepunkt bei (1|0):

$f''_{(1)} = 0$

$6a + 2b = 0$

$f_{(1)} = 0$

$a + b + c + d = 0$

Minimum bei (0|-2):

$f_{(0)} = -2 \dashrightarrow d = -2$

$f'_{(0)} = 0 \dashrightarrow c = 0$

Mit $d = -2$ und $c = 0$ eingesetzt:

$6a + 2b = 0 \quad (1)$

$a + b - 2 = 0 \quad (2)$

$(1) + (2) * (-2)$

$6a + 2b = 0$
$-2a - 2b = -4$

$4a = -4 |:4$

$a = -1$
In (1) eingesetzt:

$-6 + 2b = 0 \ |+6$

$2b = 6 \ |:2$

$b = 3$

$f_{(x)} = -x^3 + 3x^2 - 2$

$f'_{(x)} = -3x^2 + 6x$

$f''_{(x)} = -6x + 6$

Extremwerte:

$f'_{(x)} = 0$

$-3x^2 + 6x = 0$

$-3x(x - 2) = 0$

$-3x = 0 \ |3$

$x_1 = 0$

$x - 2 = 0 \ |+2$

$x_2 = 2$

$f''_{(0)} = 6 > 0$ --> Minimum

$f''_{(2)} = -6 * 2 + 6 = -6 < 0$ ---> Maximum

A_1 liegt zwischen $f_{(x)}$ und $y = -2$:

$f_{(x)} - y = -x^3 + 3x^2 - 2 - (-2) = -x^3 + 3x^2$

$$A_1 = \int_0^3 (-x^3+3x^2)dx = \left| -\frac{x^4}{4} + x^3 \right|_0^3$$

A_1 = $|6{,}75| =$ **6,75**

A_2 liegt zwischen $f_{(x)}$ und $y = 2$:

$f_{(x)} - y = -x^3 + 3x^2 - 2 - 2 = -x^3 + 3x^2 - 4$

$$A_2 = \int_0^2 (-x^3+3x^2-4)dx = \left| -\frac{x^4}{4} + x^3 - 4x \right|_0^2$$

A_2 = $|-4| =$ **4**

A_3 liegt zwischen $f_{(x)}$ und $y = 2$:

$f_{(x)} - y = -x^3 + 3x^2 - 2 - 2 = -x^3 + 3x^2 - 4$

$$A_3 = \int_2^3 (-x^3+3x^2-4)dx = \left| -\frac{x^4}{4} + x^3 - 4x \right|_2^3$$

A_3 = $|-5{,}25 - (-4)| =$ **1,25**