Integral Aufgabe 233

Berechnen Sie den Flächeninhalt A, der von $f_{(x)} = x^3/9 - 4x/3$ und der Tangente an das lokale Maximum von $f_{(x)}$ begrenzt wird.

$f_{(x)}$ hat nur ungerade Exponenten --> punktsymmetrisch

$$f'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{4}{3}$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{4}{3} = 0 \quad |*3$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad |+4$$

$$x^2 = 4 \quad |\sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm 2|\sqrt{}$$

$$f''_{(x)} = \frac{2x}{3}$$

$$f''_{(2)} = \frac{4}{3} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$f''_{(-2)} = \frac{-4}{3} < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$f_{(-2)} = \frac{(-2)^3}{9} - \frac{4 * (-2)}{3} = \frac{-8}{9} + \frac{24}{9} = \frac{16}{9} = y_T$$

Schnittpunkte mit $f_{(x)}$:

$$\frac{x^3}{9} - \frac{4x}{3} = \frac{16}{9} \quad |*9$$

$$x^3 - 12x = 16 \quad |-16$$

$$x^3 - 12x - 16 = 0$$

Durch Probieren $x_1 = 4$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 - 12x - 16 : (x - 4) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 - 4x^2) \\
\text{-------------} \\
\qquad\quad 4x^2 - 12x \\
\qquad -(4x^2 - 16x) \\
\qquad \text{--------------} \\
\qquad\qquad\quad 4x - 16 \\
\qquad\qquad -(4x - 16) \\
\qquad\qquad \text{------------} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

1. Binom

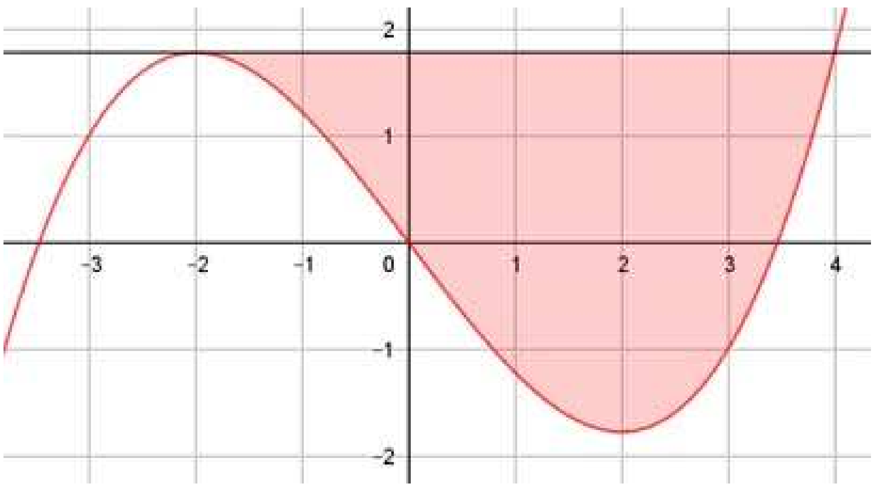
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$

$x_{2,3} = -2$ doppelte Nullstelle, Berührpunkt

$$f_{(x)} - y_T = \frac{x^3}{9} - \frac{4x}{3} - \frac{16}{9}$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(\frac{x^3}{9} - \frac{4x}{3} - \frac{16}{9}\right)dx = \left| \frac{x^4}{36} - \frac{2x^2}{3} - \frac{16}{9}x \right|_{-2}^{4}$$

A = |-10,67 - (1,33)| = **12**



Eine zusätzliche Überlegung, wenn das Maximum von $f_{(x)} = ax^3 + bx$ an der Stelle x_0 auftritt:

$f_{(x)} = ax^3 + bx \qquad a, b \neq 0$

$f'_{(x)} = 3ax^2 + b$

$f''_{(x)} = 6ax$

$f'_{(x)} = 0$

$3ax^2 + b = 0 | -b$

$3ax^2 = -b \ | :3a$

$x^2 = -\frac{b}{3a} \ | \sqrt{} \qquad -\frac{b}{3a} > 0$

$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{b}{3a}}$

$x_0 = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$ Wegen Punktsymmetrie gilt die folgende Rechnung auch für den negativen Wert.

$f_{(x0)} = a * \left(\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right)^3 + b * \left(\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right)$

$f_{(x0)} = -\frac{b}{3} * \sqrt{-\frac{b}{3a}} + b * \sqrt{-\frac{b}{3a}}$

$f_{(x0)} = \frac{2}{3} b * \sqrt{-\frac{b}{3a}} = y_T$

Schnittpunkte:

$ax^3 + bx = \frac{2}{3} b * \sqrt{-\frac{b}{3a}} \ | -\frac{2}{3} b * \sqrt{-\frac{b}{3a}}$

$ax^3 + bx - \frac{2}{3} b * \sqrt{-\frac{b}{3a}} = 0$ Eine Nullstelle bei $\sqrt{-\frac{b}{3a}}$

Polynomdivision:

$$ax^3 + bx - \frac{2}{3} b * \sqrt{-\frac{b}{3a}} : x - \sqrt{-\frac{b}{3a}} = ax^2 + ax * \sqrt{-\frac{b}{3a}} + \frac{2}{3} b$$

$$- \left(ax^3 - ax^2 * \sqrt{-\frac{b}{3a}}\right)$$

$$ax^2 * \sqrt{-\frac{b}{3a}} + bx$$

$$-\left(ax^2 * \sqrt{-\frac{b}{3a}} + bx/3\right)$$

$$\frac{2bx}{3} - \frac{2}{3} b * \sqrt{-\frac{b}{3a}}$$

$$-\left(\frac{2bx}{3} - \frac{2}{3} b * \sqrt{-\frac{b}{3a}}\right)$$

$$0$$

$$ax^2 + ax * \sqrt{-\frac{b}{3a}} + \frac{2}{3} b = 0$$

A, B ; C - Formel:

$$A = a,\ B = a * \sqrt{-\frac{b}{3a}},\ C = \frac{2}{3} b$$

$$x_{1,2} = \frac{- a * \sqrt{-\frac{b}{3a}} \pm \sqrt{-\frac{ab}{3} - \frac{8ab}{3}}}{2 * a}$$

$$x_{1,2} = \sqrt{-\frac{b}{12a}} \pm \sqrt{-\left(\frac{9b}{12a}\right)} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{b}{3a}} \pm \frac{3}{2} \sqrt{-\frac{b}{3a}}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{b}{3a}},\ x_2 = - 2 * \sqrt{-\frac{b}{3a}} = - 2 * x_0$$