Integral Aufgabe 235

Für welches a ist der Flächeninhalt A zwischen $f_{(x)} = ax - (1 - a)x^2$ und der x-Achse für $a \neq 0;1$ minimal?

Nullstellen:

$ax - (1 - a)x^2 = 0$

$ax^2 + ax - x^2 = 0$

$x(ax + a - x) = 0$

$x_1 = 0$

$ax + a - x = 0$

$x(a - 1) + a = 0 \quad |-a$

$x(a - 1) = - a \quad | :(a - 1)$

$$x_2 = \frac{-a}{a - 1} = \frac{-a}{-(1 - a)} = \frac{a}{1 - a}$$

$$A = \int_0^{\frac{a}{a-1}} (ax - (1 - a)x^2)dx = \left|\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{ax^3}{3}\right|_0^{\frac{a}{a-1}}$$

$$A = \left|\frac{x^2(3a - 2x + 2ax)}{6}\right|_0^{\frac{a}{a-1}} = \left|\frac{\frac{a^2}{(1-a)^2}\left(3a - \frac{2a}{1-a} + \frac{2a^2}{1-a}\right.}{6}\right|$$

$$A_{(a)} = \left|\frac{\frac{a^2}{(1-a)^2}\left(\frac{3a - 3a^2 - 2a + 2a^2}{1-a}\right)}{6}\right| = \left|\frac{\frac{a^2}{(1-a)^2} * \frac{a - a^2}{1-a}}{6}\right|$$

$$A_{(a)} = \left|\frac{\frac{a^2}{(1-a)^2} * \frac{a(1-a)}{1-a}}{6}\right| = \frac{|a^3|}{6(1 - a)^2}$$

Für $a^3 > 0$ gilt:

Quotientenregel und Kettenregel:

$u = a^3$, $u' = 3a^2$

$v = 6(1 - a)^2$, $v' = - 12(1 - a)$

$$A'_{(a)} = \frac{3a^2 * 6(1 - a)^2 - (-12(1 - a)) * a^3}{36(1 - a)^4}$$

$$A'_{(a)} = \frac{(1 - a)[18a^2(1 - a) + 12a^3]}{36(1 - a)^4}$$

$$A'_{(a)} = \frac{18a^2 - 18a^3 + 12a^3}{36(1 - a)^3} = \frac{6a^2(3 - a)}{36(1 - a)^3} = \frac{a^2(3 - a)}{6(1 - a)^3}$$

$$\frac{a^2(3 - a)}{6(1 - a)^3} = 0 \quad |*(6(1 - a)^3$$

$a^2(3 - a) = 0$

$a^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$

$a_{1,2} = 0$ keine Lösung

$3 - a = 0 \quad |+a$

$a_3 = 3$

Zur Beurteilung, ob $A''_{(a)}$ > oder < 0 : (Begründung siehe

Kurvendiskussion Aufgabe 105)

Ableitung des Zählers:

$u = 3a^2 - a^3$, $u' = 6a - 3a^2$

$$A''_{(3)} = \frac{6 * 3 - 3 * 3^2}{6(1 - 3)^3} = \frac{< 0}{< 0} = > 0 \text{ --> Minimum}$$

Für $a^3 < 0$ gilt:

Quotientenregel und Kettenregel:

$u = - a^3$, $u' = - 3a^2$

$v = 6(1 - a)^2$, $v' = - 12(1 - a)$

$$A'_{(a)} = \frac{- 3a^2 * 6(1 - a)^2 - (-12(1 - a)) * - a^3}{36(1 - a)^4}$$

$$A'_{(a)} = \frac{(1 - a)[- 18a^2(1 - a) - 12a^3]}{36(1 - a)^4}$$

$$A'_{(a)} = \frac{- 18a^2 + 18a^3 - 12a^3}{36(1 - a)^3} = \frac{6a^2(a - 3)}{36(1 - a)^3} = \frac{a^2(a - 3)}{6(1 - a)^3}$$

$$\frac{a^2(a - 3)}{6(1 - a)^3} = 0 \quad |*(6(1 - a)^3$$

$a^2(a - 3) = 0$

$a^2 = 0 \; |\sqrt{\ }$

$a_{1,2} = 0$ keine Lösung

$a - 3 = 0 \; |+3$

$a_3 = 3$

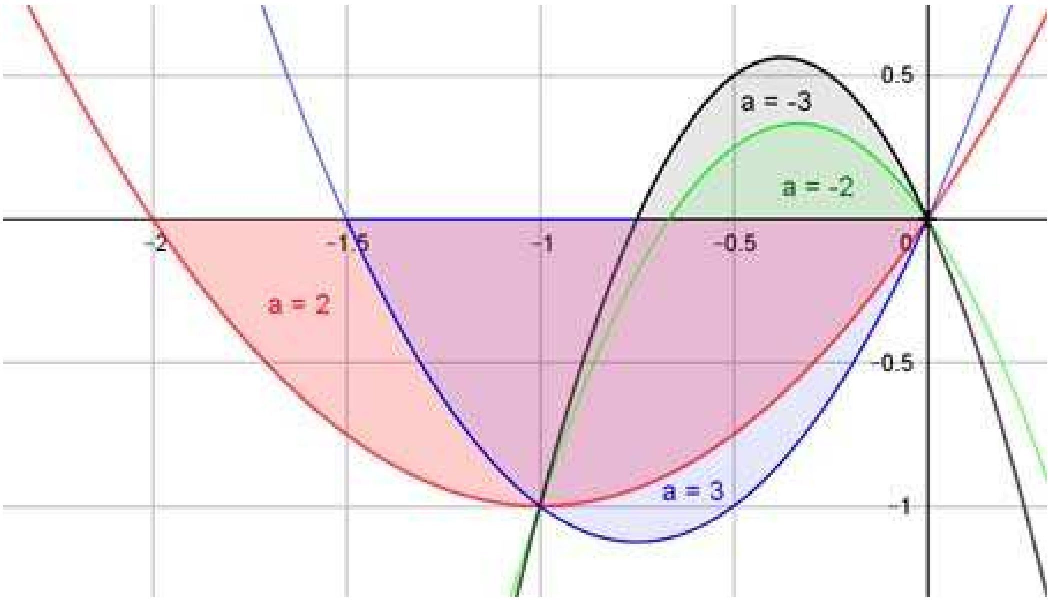
Zur Beurteilung, ob $A''_{(a)} >$ oder < 0 : (Begründung siehe

Kurvendiskussion Aufgabe 105)

Ableitung des Zählers:

$u = a^3 - 3a^2$, $u' = 3a^2 - 6a$

$$A''_{(3)} = \frac{3 * 3^2 - 6 * 3}{6(1 - 3)^3} = \frac{> 0}{< 0} = < 0 \text{ --> Maximum}$$



a = -3
a = -2
a = 2
a = 3
0.5
-0.5
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0