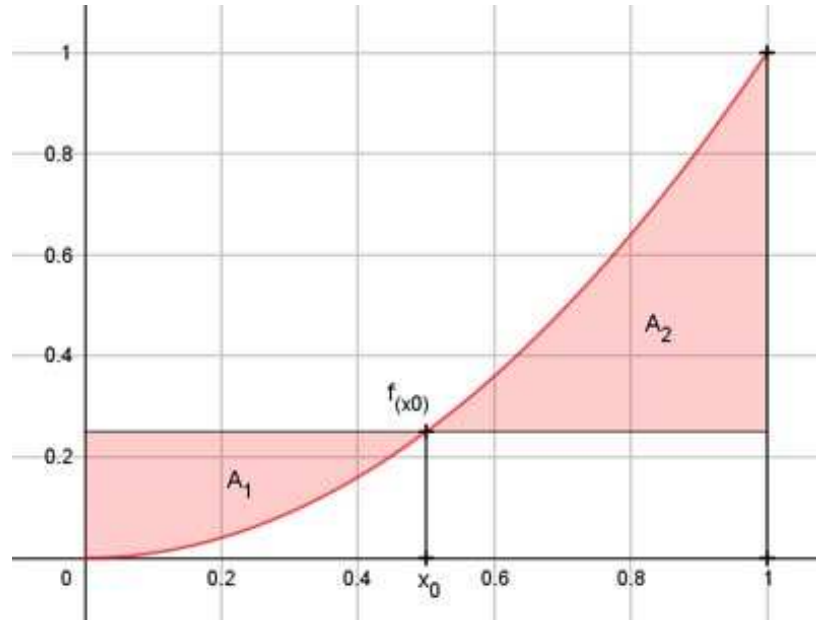


Integral Aufgabe 237

Eine Parallele zur x-Achse unterteilt den Graphen von $f(x) = x^2$ in die zwei Flächen A_1 und A_2 . Für welches x ist die Summe A der beiden Flächen minimal?



$A_1 =$ Rechteck - Fläche unter $f(x)$

$$A_1 = x_0 * x_0^2 - \int_0^{x_0} x^2 dx = x_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} = x_0^3 - \frac{x_0^3}{3}$$

A_1 liegt oberhalb der x-Achse -->

$$A_1 = x_0^3 - \frac{x_0^3}{3} = \frac{2}{3} x_0^3$$

$A_2 =$ Fläche unter $f(x)$ - Rechteck

$$A_2 = \int_{x_0}^1 x^2 dx - (1 - x_0) * x_0^2$$

$$A_2 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x_0}^1 - x_0^2 + x_0^3 = \frac{1}{3} - \frac{x_0^3}{3} - x_0^2 + x_0^3$$

A_2 liegt oberhalb der x-Achse -->

$$A_2 = \frac{1}{3} - x_0^2 + \frac{2}{3} x_0^3$$

$$A = \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{2}{3}x_0^3 - x_0^2 + \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{4}{3}x_0^3 - x_0^2 + \frac{1}{3}$$

$$A'_{(x_0)} = 4x_0^2 - 2x_0$$

$$4x_0^2 - 2x_0 = 0$$

$$2x_0(2x_0 - 1) = 0$$

$$2x_0 = 0 \quad | :2$$

$$x_{01} = 0$$

$$2x_0 - 1 = 0 \quad | +1$$

$$2x_0 = 1 \quad |$$

$$x_{02} = 0,5$$

$$A''_{(x_0)} = 8x_0 - 2$$

$$A''_{(0)} = -2 < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

$$A''_{(0,5)} = 8 * 0,5 - 2 = 2 > 0 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$A_{(0,5)} = \frac{4}{3} * 0,5^3 - 0,5^2 + \frac{1}{3} = 0,25$$

Randbetrachtung:

$$A_{(1)} = \frac{4}{3} * 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0,25$$