Integral Aufgabe 247

Für welches a ist der Flächeninhalt A zwischen $f_{(x)} = ax(x^2 - 9)$ und $g_{(x)} = x$ für $a > 0$ minimal?

Nullstellen:

$ax(x^2 - 9) = 0$

$ax = 0$ |:a

$x_1 = 0$

$x^2 - 9 = 0$ |+9

$x^2 = 9$ |√

$x_2 = 3$

$x_3 = -3$ keine Lösung $x < 0$

Schnittpunkte:

$ax(x^2 - 9) = x$ |-x

$ax(x^2 - 9) - x = 0$

$x[a(x^2 - 9) - 1] = 0$

$x_1 = 0$

$ax^2 - 9a - 1 = 0$ |+9a + 1

$ax^2 = 9a + 1$|:a

$x^2 = \frac{9a + 1}{a}$ |√

$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{9a+1}{a}}$

Wenn $x > 0$, dann liegt A unterhalb von $g_{(x)}$:

$$A = - \int_0^{\sqrt{\frac{9a+1}{a}}} (ax^3 - 9ax - x)dx = -(\frac{ax^4}{4} - 4{,}5ax^2 - 0{,}5x^2 \Big|_0^{\sqrt{\frac{9a+1}{a}}}$$

$$A_{(a)} = - (a * \frac{(\frac{9a+1}{a})^2}{4} - 4{,}5a * \frac{9a + 1}{a} - 0{,}5 * \frac{9a + 1}{a})$$

$$A_{(a)} = - (\frac{81a^2 + 18a + 1 - 162a^2 - 18a - 18a - 2}{4a})$$

$$A_{(a)} = - (\frac{- 81a^2 - 18a - 1}{4a}) = \frac{81a^2 + 18a + 1}{4a} = \frac{(9a + 1)^2}{4a}$$

Potenz, Kettenregel und Quotientenregel:

$u = (9a + 1)^2$, $u' = 18(9a + 1)$

$v= 4a$, $v' = 4$

$$A'_{(a)} = \frac{18(9a + 1) * 4a - 4 * (9a + 1)^2}{16a^2} = \frac{648a^2 + 72a - 324a^2 - 72a - 4}{16a^2}$$

$$A'_{(a)} = \frac{324a^2 - 4}{16a^2}$$

$$\frac{324a^2 - 4}{16a^2} = 0 \ |*16a^2$$

$$324a^2 - 4 = 0|+4$$

$$324a^2 = 4 \ |:324$$

$$a^2 = 81 \ |\sqrt{}$$

$$\mathbf{a_1 = \frac{1}{9}}$$

$$a_2 = -\frac{1}{9} \text{ keine Lösung} < 0$$

Zur Beurteilung, ob $A''_{(a)} > 0$: (Begründung siehe Kurvendiskussion

Aufgabe 105)

Ableitung des Zählers Z:

$$Z' = 648a$$

$$A''_{(a)} = \frac{648a}{16a^2} = \frac{40{,}5}{a} > 0 \text{ für } a > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$A_{(1/9)} = \frac{81 * (1/9)^2 + 18 * (1/9) + 1}{4 * (1/9)} = \frac{1 + 2 + 1}{4/9} = 9$$

Randbetrachtung:

$A_{(0)} = \infty > A_{(1/9)}$

$A_{(\infty)} = \infty > A_{(1/9)}$