Kurven Aufgabe 115

$$\mathbf{f_{(x)} = \frac{x^4 - 17x^2 + 16}{x^2}}$$

Quotientenregel erste Ableitung:

$u = x^4 - 17x^2 + 16$, $u' = 4x^3 - 34x$

$v = x^2$, $v' = 2x$

$$f'_{(x)} = \frac{(4x^3 - 34x) * x^2 - 2x * (x^4 - 17x^2 + 16)}{x^4}$$

$$f'_{(x)} = \frac{4x^5 - 34x^3 - 2x^5 + 34x^3 - 32x}{x^4} = \frac{2x^5 - 32x}{x^4} = \frac{x * (2x^4 - 32)}{x^4}$$

$$f'_{(x)} = \frac{2x^4 - 32}{x^3}$$

Quotientenregel zweite Ableitung:

$u = 2x^4 - 32$, $u' = 8x^3$

$v = x^3$, $v' = 3x^2$

$$f''_{(x)} = \frac{8x^3 * x^3 - 3x^2 * (2x^4 - 32)}{x^6} = \frac{8x^6 - 6x^6 + 96x^2}{x^6} = \frac{2x^6 + 96x^2}{x^6}$$

$$f''_{(x)} = \frac{x^2 * (2x^4 + 96)}{x^6} = \frac{2x^4 + 96}{x^4}$$

Zur Beurteilung, ob $f'''_{(x)} \neq 0$: (Begründung siehe Aufgabe 105)

$u = 2x^4 + 96$, $u' = 8x^3$

$$f'''_{(x)} = \frac{u'}{v} = \frac{8x^3}{x^4} = \frac{8}{x} \neq 0 \text{ für alle } x \neq 0$$

Definitionsbereich: $\mathbf{- \infty < x < \infty, x \neq - 1}$

Wertebereich: $\mathbf{- 9 \leq f_{(x)} < \infty}$ (siehe Extrempunkte)

Asymptoten:

$$y = x^4 - 17x^2 + 16 : x^2 = \mathbf{x^2 - 17} + \frac{16}{x^2}$$

$$\begin{array}{l} -(x^4) \\ \hline \quad -17x^2 \\ -(-17x^2) \\ \hline \qquad 16 \end{array}$$

$x^2 = 0 \ |\sqrt{}$

$x = 0$

Symmetrie:

$$f_{(-x)} = \frac{(-x)^4 - 17(-x)^2 + 16}{(-x)^2} = \frac{x^4 - 17x^2 + 16}{x^2} = f_{(-x)}$$

--> **achsensymmetrisch zur y-Achse**

Nullstellen:

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

Substitution $z = x^2$

$z^2 - 17z + 16 = 0$

p, q - Formel

$p = -17,\ q = 16$

$$z_{1,2} = \frac{-(-17)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-17}{2}\right)^2 - 16}$$

$z_{1,2} = 8{,}5 \pm \sqrt{56{,}25}$

$z_{1,2} = 8{,}5 \pm 7{,}5$

$z_1 = 16$

$z_2 = 1$

Rücksubstituiert:

$x^2 = 16 \ |\sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm 4$

$x^2 = 1 \ |\sqrt{}$

$x_{3,4} = \pm 1$

$N_1(4|0), N_2(-4|0), N_3(1|0), N_4(-1|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Es gilt $x \neq 0$ --> kein Schnittpunkt

Extrempunkte:

$2x^4 - 32 = 0 | +32$

$2x^4 = 32 \mid :2$

$x^4 = 16 \mid \sqrt[4]{}$

$x_{1,2} = \pm 2,\ f_{(2)} = f_{(-2)} = \dfrac{2^4 - 17 * 2^2 + 16}{2^2} = -9$

$f''_{(2)} = \dfrac{2(2^4 + 48)}{2^4} > 0$ --> **Tiefpunkt (2|- 9)**

$f''_{(-2)} = > 0$ --> **Tiefpunkt (- 2|- 9)**

Wendepunkte:

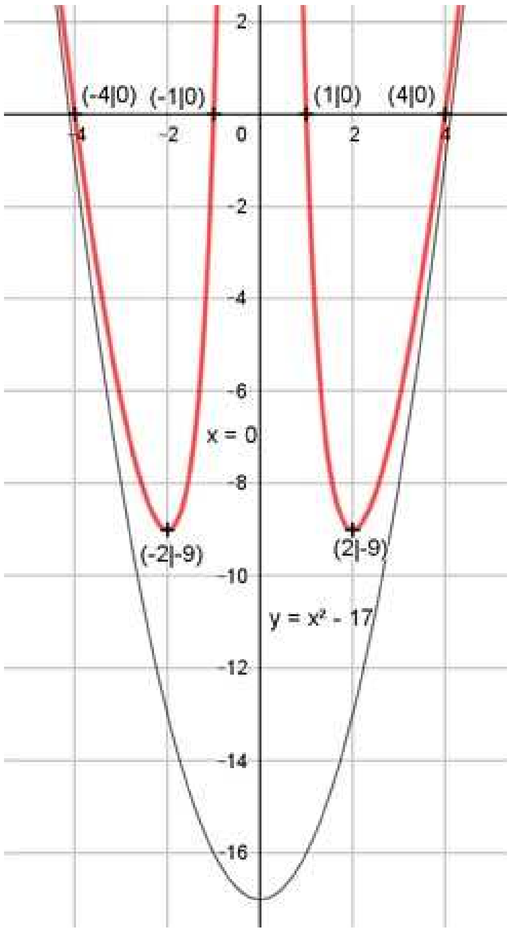
$2(x^4 + 48) = 0 \mid :2$

$x^4 + 48 = 0 \mid -48$

$x^4 = -48 \mid \sqrt[4]{}$

--> keine Lösung --> **keine Wendepunkte**

Graph:



(-4|0)
(-1|0)
(1|0)
(4|0)
(-2|-9)
(2|-9)
x = 0
y = x² - 17