Kurven Aufgabe 119

$$\mathbf{f_{(x)} = \frac{4x^2}{1 - x^2}}$$

Quotientenregel erste Ableitung:

$u = 4x^2,\ u' = 8x$

$v = 1 - x^2,\ v' = - 2x$

$$f'_{(x)} = \frac{8x * (1 - x^2) - (-2x) * 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{8x - 8x^3 + 8x^3}{(1 - x^2)^2} = \frac{8x}{(1 - x^2)^2}$$

Quotientenregel zweite Ableitung:

$u = 8x,\ u' = 8$

$v = (1- x^2)^2$

Kettenregel:

$v' = 2 * (-2x) * (1 - x^2) = - 4x * (1 - x^2)$

$$f''_{(x)} = \frac{8 * (1 - x^2)^2 - (- 4x)(1 - x^2) * 8x}{(1 - x^2)^4}$$

$$f''_{(x)} = \frac{(1 - x^2) * [8 * (1- x^2) + 32x^2]}{(1 - x^2)^4} = \frac{8 - 8x^2 + 32x^2}{(1 - x^2)^3} = \frac{24x^2 + 8}{(1 - x^2)^3}$$

Zur Beurteilung, ob $f'''_{(x)} \neq 0$: (Begründung siehe Aufgabe 105)

$u = 24x^2 + 8,\ u' = 48x$

$$f'''_{(x)} = \frac{u'}{v} = \frac{48x}{(1 - x^2)^3}$$ ist immer $\neq 0$ für alle $x \neq 0, 1, -1$

Definitionsbereich: **$- \infty < x < \infty$**

Wertebereich: **$- \infty < f_{(x)} < -4,\ 0 \leq f_{(x)} < \infty$** (siehe Asymptoten und Extrempunkte)

Asymptoten:

$$y = 4x^2 : 1 - x^2 = \mathbf{-4} + \frac{4}{1 - x^2}$$

$$\begin{array}{l} \;\; -(4x^2 - 4) \\ \hline \qquad 4 \end{array}$$

$1 - x^2 = 0 \;|+x^2$

$x^2 = 1 |\sqrt{\ }$

$\mathbf{x_{1,2} = \pm 1}$

Symmetrie:

$$f_{(-x)} = \frac{4 * (-x)^2}{1 - (-x)^2} = \frac{4x^2}{1 - x^2} = f_{(x)}$$

--> **achsensymmetrisch zur y-Achse.**

Nullstellen:

$4x^2 = 0 \;| :4$

$x^2 = 0 \;|\sqrt{\ }$

$x_{1,2} = 0$ --> Berührpunkt $\mathbf{N_{1,2}(0|0)}$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_{(0)} = \frac{4 * 0^2}{1 - 0^2} = 0$$

$\mathbf{S_y(0|0)}$

Extrempunkte:

$8x = 0 \;|: 8$

$x = 0;\; f_{(0)} = 0$

$$f''_{(0)} = \frac{24 * 0 + 8}{(1 - 0^2)^3} > 0$$

--> **Tiefpunkt (0|0)**

Wendepunkte:

$24x^2 + 8 = 0 \mid -8$

$24x^2 = -8 \mid :24$

$x^2 = -1/3 \mid \sqrt{\ }$ --> keine Lösung --> **keine Wendepunkte**

Graph: