Kurven Aufgabe 121

$$\mathbf{f_{(x)} = \frac{x^3}{x^2 - 1}}$$

Quotientenregel erste Ableitung:

$u = x^3$, $u' = 3x^2$

$v = x^2 - 1$, $v' = 2x$

$$f'_{(x)} = \frac{3x^2 * (x^2 - 1) - 2x * x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Quotientenregel zweite Ableitung:

$u = x^4 - 3x^2$, $u' = 4x^3 - 6x$

$v = (x^2 - 1)^2$

Kettenregel:

$v' = 2 * 2x * (x^2 - 1) = 4x * (x^2 - 1)$

$$f''_{(x)} = \frac{(4x^3 - 6x) * (x^2 - 1)^2 - 4x * (x^2 - 1) * (x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$f''_{(x)} = \frac{(x^2 - 1) * [(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x * (x^4 - 3x^2)]}{(x^2 - 1)^4}$$

$$f''_{(x)} = \frac{4x^5 - 10x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

Zur Beurteilung, ob $f'''_{(x)} \neq 0$: (Begründung siehe Aufgabe 105)

$u = 2x^3 + 6x$, $u' = 6x^2 + 6$

$$f'''_{(x)} = \frac{u'}{v} = \frac{6x^2 + 6}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \text{ für alle } x \neq 1,-1$$

Definitionsbereich: $\mathbf{-\infty < x < \infty, x \neq 1, -1}$

Wertebereich: $\mathbf{-\infty < f_{(x)} < \infty}$

Asymptoten:

y = $x^3 : x^2 - 1 =$ **x** $+ \dfrac{x}{x^2 - 1}$

$-(x^3 - 1x)$

----

x

$x^2 - 1 = 0 \;|+1$

$x^2 = 1 \;|\; \sqrt{\ }$

$\mathbf{x_{1,2} = \pm 1}$

Symmetrie:

$$f_{(-x)} = \frac{(-x)^3}{((-x)^2 - 1)} = \frac{- x^3}{(x^2 - 1)}$$

$$- f_{(-x)} = \frac{x^3}{(x^2 - 1)} = f_{(x)} \text{ -->}$$

punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

Nullstellen:

$x^3 = 0 \;|\sqrt[3]{\ }$

$x_{1,2,3} = 0$ **N(0|0)**

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_{(0)} = \frac{0^3}{0^2 - 1} = 0$$

$\mathbf{S_y(0|0)}$

Extrempunkte:

$x^4 - 3x^2 = 0$

$x^2 * (x^2 - 3) = 0$

$x^2 = 0 \;|\sqrt{\ }$

$x_{1,2} = 0;\; f_{(0)} = 0$

$x^2 - 3 = 0 \;|\; +3$

$x^2 = 3 \mid \sqrt{}$

$x_{3,4} = 1{,}73;\ f_{(1,73)} = \dfrac{1{,}73^3}{1{,}73^2 - 1} = 2{,}6;\ f_{(-1,73)} = -\,2{,}6$

$f''_{(1,73)} = \dfrac{2 * 1{,}73^3 + 6 * 1{,}73}{(1{,}73^2 - 1)^3} > 0$ --> **Tiefpunkt (1,73|2,6)**

$f''_{(-1,73)} = \dfrac{(-1{,}73)^3 + 6 * (-1{,}73)}{((-1{,}73)^2 - 1)^3} < 0$ --> **Hochpunkt (- 1,73|- 2,6)**

Wendepunkte:

$2x^3 + 6x = 0$

$x(2x^2 + 6) = 0$

$x_1 = 0;\ f_{(0)} = 0,\ f'''(0) \neq 0$ --> **WP(0|0)**

$2x^2 + 6 = 0 \mid :2$

$x^2 + 3 = 0 \mid -3$

$x^2 = -\,3 \mid \sqrt{}$ --> keine weitere Lösung

Graph: