Kurven Aufgabe 123

$$\mathbf{f_{(x)} = \frac{(9 - x^2)}{(1 - x^2)}}$$

Quotientenregel erste Ableitung:

$u = 9 - x^2$, $u' = - 2x$

$v = 1 - x^2$, $v' = - 2x$

$$f'_{(x)} = \frac{- 2x * (1 - x^2) - (-2x) * (9 - x^2)}{(1 - x^2)^2} = \frac{- 2x + 2x^3 + 18x - 2x^3}{(1 - x^2)^2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{16x}{(1 - x^2)^2}$$

Quotientenregel zweite Ableitung:

$u = 16x$, $u' = 16$

$v = (1 - x^2)^2$

Kettenregel:

$v' = 2 * (-2) * (1 - x^2) = - 4x * (1 - x^2)$

$$f''_{(x)} = \frac{16 * (1 - x^2)^2 - (-4x) * (1 - x^2) * 16x}{(1 - x^2)^4}$$

$$f''_{(x)} = \frac{(1 - x^2) * [16 * (1 - x^2) + 64x^2]}{(1 - x^2)^4} = \frac{16 - 16x^2 + 64x^2}{(1 - x^2)^3}$$

$$f''_{(x)} = \frac{48x^2 + 16}{(1 - x^2)^3}$$

Zur Beurteilung, ob $f'''_{(x)} \neq 0$: (Begründung siehe Aufgabe 105)

$u = 48x^2 + 16$, $u' = 96x$

$$f'''_{(x)} = \frac{u'}{v} = \frac{96x}{(1 - x^2)^3} \neq 0 \text{ für alle } x \neq 0, 1, - 1$$

Definitionsbereich: $\mathbf{-\infty < x < \infty,\ x \neq 1,\ -1}$

Wertebereich: $\mathbf{-\infty < f_{(x)} < 1,\ 9 \leq f_{(x)} < \infty}$ (siehe Asymptoten und Extrempunkte)

Asymptoten:

$$y = 9 - x^2 : 1 - x^2 = \mathbf{1} + \frac{8}{(1 - x^2)}$$

$$\begin{array}{l} -(1 - x^2) \\ \hline 8 \end{array}$$

$1 - x^2 = 0 \mid + x^2$

$x^2 = 1 \mid \sqrt{}$

$\mathbf{x = \pm 1}$

Symmetrie:

$$f_{(-x)} = \frac{9 - (-x)^2}{1 - (-x)^2} = \frac{9 - x^2}{1 - x^2} = f_{(x)} \rightarrow$$

achsensymmetrisch zur y-Achse

Nullstellen:

$9 - x^2 = 0 \mid + x^2$

$x^2 = 9 \mid \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm 3$

$\mathbf{N_1(3|0),\ N_2(-3|0)}$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_{(0)} = \frac{9 - 0^2}{(1 - 0^2)} = 9$$

$\mathbf{S_y(0|9)}$

Extrempunkte:

$16x = 0 \mid :16$

$$x = 0;\ f_{(0)} = \frac{9 - 0^2}{1 - 0^2} = 9$$

$$f''_{(0)} = \frac{48 * 0^2 + 16}{(1 - 0^2)^3} > 0 \text{ --> } \textbf{Tiefpunkt (0|9)}$$

Wendepunkte:

$48x^2 + 16 = 0 \ |-16$

$48x^2 = - 16 \ | :48$

$x^2 = - \frac{1}{3} \ | \sqrt{\ }$ --> keine Lösung --> **keine Wendepunkte**

Graph: