Kurven Aufgabe 135

$$\mathbf{f_{(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}} = \frac{x^{0,5}}{x^2 + 1}$$

Quotientenregel erste Ableitung:

$u = x^{0,5}$, $u' = 0,5 * x^{-0,5}$

$v = x^2 + 1$, $v' = 2x$

$$f'_{(x)} = \frac{0,5 * x^{-0,5} * (x^2 + 1) - 2x * x^{0,5}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\dfrac{0,5 * (x^2 + 1)}{x^{0,5}} - 2x * x^{0,5}}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{0,5x^2 + 0,5 - 2x^2}{x^{0,5} * (x^2 + 1)^2} = \frac{0,5 - 1,5x^2}{x^{0,5} * (x^2 + 1)^2} = \frac{(0,5 - 1,5x^2) * x^{-0,5}}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{0,5 * x^{-0,5} - 1,5 * x^{1,5}}{(x^2 + 1)^2}$$

Quotientenregel zweite Ableitung:

$u = 0,5 * x^{-0,5} - 1,5x^{1,5}$, $u' = - 0,5 * 0,5 * x^{-1,5} - 1,5 * 1,5 * x^{0,5}$

$u' = - 0,25 * x^{-1,5} - 2,25 * x^{0,5}$

$v = (x^2 + 1)^2$

Kettenregel:

$v' = 2 * 2x * (x^2 + 1) = 4x * (x^2 + 1)$

$$f''_{(x)} = \frac{(- 0,25*x^{-1,5} - 2,25x^{0,5}) * (x^2 + 1)^2 - 4x*(x^2 + 1)*(0,5x^{-0,5} - 1,5x^{1,5})}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''_{(x)} = (x^2 + 1) * \frac{(- 0,25x^{-1,5} - 2,25x^{0,5}) * (x^2 + 1) - 2x^{0,5} + 6x^{2,5}}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''_{(x)} = (x^2 + 1)*\frac{- 0,25x^{0,5} - 2,25x^{2,5} - 0,25*x^{-1,5} - 2,25*x^{0,5} - 2x^{0,5} + 6x^{2,5}}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''_{(x)} = \frac{3{,}75x^{2,5} - 4{,}5x^{0,5} - 0{,}25x^{-1,5}}{(x^2 + 1)^3}$$

Zur Beurteilung, ob $f'''_{(x)} \neq 0$: (Begründung siehe Aufgabe 105)

$u = 3{,}75x^{2,5} - 4{,}5x^{0,5} - 0{,}25x^{-1,5}$, $u' = 9{,}375x^{1,5} + 2{,}25x^{-0,5} + 0{,}375x^{-2,5}$

$$f'''_{(x)} = \frac{u'}{v} = \frac{9{,}375x^{1,5} + 2{,}25x^{-0,5} + 0{,}375x^{-2,5}}{(x^2 + 1)^3} \neq 0 \text{ für alle } x \neq 0,$$

Definitionsbereich: **$0 \leq x < \infty$**

Wertebereich: $f_{(x)}$ wird dann am größten, wenn $x = 0{,}58$ (Extremum)

$f_{(0,58)} = 0{,}57$ --> **$0 \leq f_{(x)} \leq 0{,}57$**

Asymptoten:

$y =$ $x^{0,5} : x^2 + 1 =$ **0** für $x \to \infty$

Symmetrie: -

Nullstellen:

$\sqrt{x} = 0 \mid ^2$

$x = 0$ **N(0|0)**

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_{(0)} = \frac{\sqrt{0}}{0^2 + 1}$$

Sy(0|0)

Extrempunkte:

$0{,}5 * x^{-0,5} - 1{,}5 * x^{1,5}$

$0{,}5 * x^{-0,5} * (1 - 3x^2) = 0$

$$\frac{0{,}5}{x^{0,5}} * (1 - 3x^2) = 0$$

$$\frac{0,5}{x^{0,5}} = 0 \mid \cdot x^{0,5}$$

0,5 = 0 --> Widerspruch --> keine Lösung

$1 - 3x^2 = 0 \mid +3x^2$

$3x^2 = 1 \mid :3$

$x^2 = 1/3 \mid \surd$

$x_{1,2} = \pm\, 0,58$

$$x_1 = 0,58,\ f_{(0,58)} = \frac{\sqrt{0,58}}{0,58^2 + 1} = 0,57$$

$x_2 = -\,0,58$ außerhalb des Definitionsbereiches

$$f''_{(0,58)} = \frac{3,75(0,58)^{2,5} - 4,5(0,58)^{0,5} - 0,25(0,58)^{-1,5}}{(0,58^2 + 1)^3} < 0 \text{ -->}$$

Hochpunkt(0,58|0,57)

Wendepunkte:

$3,75 \cdot x^{2,5} - 4,5 \cdot x^{0,5} - 0,25 \cdot x^{-1,5} = 0$

$0,25 \cdot x^{-1,5} \cdot (15 \cdot x^4 - 18 \cdot x^2 - 1) = 0 \mid :(0,25 \cdot x^{-1,5})$

$15x^4 + 18x^2 - 1 = 0$

Substitution $x^2 = z$

$15z^2 - 18z - 1 = 0$

A = 15, B = - 18, C = - 1

$$z_{1,2} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-1)}}{2 \cdot 15} = \frac{18 \pm \sqrt{384}}{30}$$

$$z_{1,2} = \frac{18 \pm 19,6}{30}$$

$z_1 = 1,25$

z_2 = - 0,05 keine Lösung

Rücksubstitution:

$x^2 = 1,25 \quad |\sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm\ 1,12$

$$x_1 = 1,12,\ f_{(1,12)} = \frac{\sqrt{1,12}}{1,12^2 + 1} = 0,47$$ **WP(1,12|0,47)**

x_2 = - 1,12 außerhalb des Definitionsbereiches

Graph: