Kurven Aufgabe 160

$$\mathbf{f_{(x)} = \frac{(\ln x)^2 - 1}{x}} = (\ln x)^2 - 1 * x^{-1}$$

Produktregel erste Ableitung:

$u = (\ln x)^2 - 1$

Kettenregel:

$$u' = \frac{2 * \ln x}{x}$$

$v = x^{-1}$, $v' = - x^{-2}$

$$f'_{(x)} = \frac{2 * \ln x}{x} * x^{-1} + (- x^{-2}) * ((\ln x)^2 - 1)$$

$$f'_{(x)} = 2 * \ln x * x^{-2} - x^{-2} * ((\ln x)^2 - 1) = x^{-2} * (2 * \ln x - (\ln x)^2 + 1)$$

$$f'_{(x)} = \frac{2 * \ln x - (\ln x)^2 + 1}{x^2}$$

Produktregel zweite Ableitung:

$u = x^{-2}$, $u' = - 2 * x^{-3}$

$v = 2 * \ln x - (\ln x)^2 + 1$

Summen- und Kettenregel:

$$v' = \frac{2}{x} - \frac{2 * \ln x}{x} = \frac{2 - 2 * \ln x}{x}$$

$$f''_{(x)} = - 2 * x^{-3} * (2 * \ln x - (\ln x)^2 + 1) + \frac{2 - 2 * \ln x}{x} * x^{-2}$$

$$f''_{(x)} = - 2 * x^{-3} * (2 * \ln x - (\ln x)^2 + 1) + (2 - 2 * \ln x) * x^{-3}$$

$$f''_{(x)} = x^{-3} * (- 4 * \ln x + 2 * (\ln x)^2 - 2 + 2 - 2 * \ln x)$$

$$f''_{(x)} = x^{-3} * (2 * (\ln x)^2 - 6 * \ln x) = \frac{2 * (\ln x)^2 - 6 * \ln x}{x^3}$$

Zur Beurteilung, ob $f'''_{(x)} \neq 0$: (Begründung siehe Aufgabe 105)

$u = 2 * (\ln x)^2 - 6 * \ln x$

Summen- und Kettenregel:

$$u' = \frac{2 * 2 * \ln x}{x} - \frac{6}{x} = \frac{4 * \ln x - 6}{x}$$

$$f'''_{(x)} = \frac{u'}{v} = \frac{\frac{4 * \ln x - 6}{x}}{x^3} = \frac{4 * \ln x - 6}{x^4} \neq 0 \text{ für } x \neq 0$$

Definitionsbereich: **$0 < x < \infty$**

Wertebereich: $f_{(x)}$ ist dann am kleinsten, wenn x = 0,66 (Extremum)

und $f_{(x)}$ = - 1,25 --> **$-1{,}25 \leq f_{(x)} < \infty$**

Asymptoten: -

Für x --> ∞ geht $f_{(x)}$ --> 0

y = 0

Für x --> 0 geht $f_{(x)}$ --> ∞

x = 0

Symmetrie: -

Nullstellen:

$$\frac{(\ln x)^2 - 1}{x} = 0 \quad | *x$$

$(\ln x)^2 - 1 = 0$ |+1

$(\ln x)^2 = 1$ |√

$\ln x = \pm 1$

$x = e^{\pm 1}$

$x_1 = e^1 = 2{,}72$, $x_2 = e^{-1} = 0{,}37$ **$N_1(2{,}72|0)$, $N_2(0{,}37|0)$**

Schnittpunkt mit der y-Achse: -

Extrempunkte:

$$\frac{2 * \ln x - (\ln x)^2 + 1}{x^2} = 0 \quad | *x^2$$

$2 * \ln x - (\ln x)^2 + 1 = 0 \quad | *(-1)$

$(\ln x)^2 - 2 * \ln x - 1 = 0$

p, q - Formel

$p = -2$, $q = -1$

$$\ln x_{1,2} = \frac{-(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-1)}$$

$\ln x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\ln x_{1,2} = 1 \pm 1{,}414$

$\ln x_1 = 2{,}414$

$$x_1 = e^{2{,}414} = 11{,}18,\ f_{(11{,}18)} = \frac{(\ln 11{,}18)^2 - 1}{11{,}18} = 0{,}43$$

$\ln x_2 = -0{,}414$

$$x_2 = e^{-0{,}414} = 0{,}66,\ f_{(0{,}66)} = \frac{(\ln 0{,}66)^2 - 1}{0{,}66} = -1{,}25$$

$$f''_{(11{,}18)} = \frac{2 * (\ln 11{,}18)^2 - 6 * \ln 11{,}18}{11{,}18^3} < 0 \dashrightarrow$$ **Hochpunkt (11,18|0,43)**

$$f''_{(0{,}66)} = \frac{2 * (\ln 0{,}66)^2 - 6 * \ln 0{,}66}{0{,}66^3} > 0 \dashrightarrow$$ **Tiefpunkt (0,66|- 1,25)**

Wendepunkte:

$$\frac{2 * (\ln x)^2 - 6 * \ln x}{x^3} = 0 \mid * x^3$$

$2 * (\ln x)^2 - 6 * \ln x = 0$

$2 * \ln x * (\ln x - 3) = 0$

$2 * \ln x = 0 \mid :2$

$\ln x = 0$

$x_1 = e^0 = 1,\ f_{(1)} = \frac{(\ln 1)^2 - 1}{1} = -1$ **WP₁(1|-1)**

$\ln x - 3 = 0 \mid +3$

$\ln x = 3$

$x = e^3 = 20{,}1,\ f_{(20,1)} = \frac{(\ln 20{,}1)^2 - 1}{20{,}1} = 0{,}4$ **WP_2(20,1|0,4)**

Graph: