Kurven Aufgabe 168

$$\mathbf{f_{(x)} = \frac{\ln x}{x}} = \ln x * x^{-1}$$

Produktregel erste Ableitung:

$$u = \ln x,\ u' = \frac{1}{x}$$

$$v = x^{-1},\ v' = - x^{-2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{1}{x} * x^{-1} + - x^{-2} * \ln x = x^{-2} - x^{-2} * \ln x = x^{-2} * (1 - \ln x)$$

Produktregel zweite Ableitung:

$$u = x^{-2},\ u' = - 2 * x^{-3}$$

$$v = 1 - \ln x,\ v' = - \frac{1}{x}$$

$$f''_{(x)} = - 2 * x^{-3} * (1 - \ln x) + \left(- \frac{1}{x}\right) * x^{-2}$$

$$f''_{(x)} = - 2 * x^{-3} * (1 - \ln x) - x^{-3} = x^{-3} * (\ln x - 2 - 1) = \frac{\ln x - 3}{x^3}$$

Zur Beurteilung, ob $f'''_{(x)} \neq 0$: (Begründung siehe Aufgabe 105)

$$u = \ln x - 3,\ u' = \frac{1}{x}$$

$$f'''_{(x)} = \frac{u'}{v} = \frac{\frac{1}{x}}{x^3} = \frac{1}{x^4} \neq 0 \text{ für alle } x \neq 0$$

Definitionsbereich: $\mathbf{0 < x < \infty}$

Wertebereich: $f_{(x)}$ wird dann am größten, wenn $x = e = 2,72$ (Extremum)

und $f_{(e)} = 0,37$ --> $\mathbf{- \infty < f_{(x)} \leq e}$

Asymptoten:

Für x --> 0 geht $f_{(x)}$ --> - ∞

x = 0

Für y --> 0 geht x --> ∞

y = 0

Symmetrie: -

Nullstellen:

$$\frac{\ln x}{x} = 0 \mid * x$$

$\ln x = 0$

$x = e^0 = 1$ **N(1|0)**

Schnittpunkt mit der y-Achse: -

Extrempunkte:

$x^{-2} * (1 - \ln x) = 0 \mid :x^{-2}$

$1 - \ln x = 0 \mid +1$

$\ln x = 1$

$$x = e = 2{,}72,\ f_{(2,72)} = \frac{\ln e}{2{,}72} = 0{,}37$$

$$f''_{(e)} = \frac{2 * \ln e - 3}{e^3} < 0 \text{ -->}$$ **Hochpunkt (2,72|0,37)**

Wendepunkte:

$$\frac{2 * \ln x - 3}{x^3} = 0 \mid *x^3$$

$2 * \ln x - 3 = 0 \mid +3$

$2 * \ln x = 3 \mid :2$

$\ln x = 1{,}5$

$$x = e^{1,5} = 4,48,\; f_{(4,48)} = \frac{\ln e1,5}{4,48} = 0,33$$ **WP(4,48|0,33)**

Graph: