

Kurven Aufgabe 177

$$f(x) = x^2 * \sin x \quad x \text{ im Bogenmaß}$$

Produktregel erste Ableitung:

$$u = x^2, u' = 2x$$

$$v = \sin x, v' = \cos x$$

$$f'(x) = 2x * \sin x + \cos x * x^2$$

Summen- und 2mal-Produktregel zweite Ableitung:

$$u = 2x, u' = 2$$

$$v = \sin x, v' = \cos x$$

$$f''_1 = 2 * \sin x + \cos x * 2x$$

$$u = x^2, u' = 2x$$

$$v = \cos x, v' = -\sin x$$

$$f''_2 = 2x * \cos x + (-\sin x) * x^2$$

$$f''(x) = 2 * \sin x + 2x * \cos x + 2x * \cos x - x^2 * \sin x$$

$$f''(x) = 2 * \sin x + 4x * \cos x - x^2 * \sin x$$

Summen- und 2mal-Produktregel dritte Ableitung:

$$u = -x^2, u' = -2x$$

$$v = \sin x, v' = \cos x$$

$$f'''_1 = -2x * \sin x + \cos x * (-x^2)$$

$$u = 4x, u' = 4$$

$$v = \cos x, v' = -\sin x$$

$$f'''_2 = 4 * \cos x + (-\sin x) * 4x$$

$$f'''(x) = 2 * \cos x + 4 * \cos x - 4x * \sin x - 4 * \sin x + (-2x) * \sin x + \cos x * (-x^2)$$

$$f'''(x) = 6 * \cos x - 6x * \sin x - x^2 * \cos x$$

Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 2\pi$

Wertebereich: $-24,08 \leq f(x) \leq 3,95$ (siehe Extrempunkte)

Nullstellen:

$$x^2 * \sin x = 0 \quad | \quad -2$$

$$x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0 \quad \mathbf{N_1 (0|0)}$$

$$\sin x = 0$$

$$x_2 = \pi = 3,14 \cong 180^\circ \quad \mathbf{N_2 (3,14|0)}$$

$$x_3 = 2\pi = 6,28 \cong 360^\circ \quad \mathbf{N_3 (6,28|0)}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_{(0)} = 0^2 * \sin 0 = 0$$

$$\mathbf{Sy (0|0)}$$

Extrempunkte:

$$2x * \sin x + x^2 * \cos x = 0$$

Wertetabelle:

0	1	2	3	4	5	6	2π
0	1,4	2	-8,1	-16,5	-2,5	31,2	19,7

Nullstelle $x_1 = 0$

Vorzeichenwechsel zwischen 2 und 3, gewählt Nullstelle $x_{02} = 2,2$

Vorzeichenwechsel zwischen 5 und 6, gewählt Nullstelle $x_{03} = 5,07$

$$x_1 = 0, f_{(0)} = 0, f''_{(0)} = 2 * \sin 0 + 4 * 0 * \cos 0 - 0^2 * \sin 0 = 0$$

$$f'''_{(0)} = 6 * \cos 0 - 6 * 0 * \sin 0 - 0^2 * \cos 0 \neq 0 \rightarrow \mathbf{Wendepunkt (0|0)}$$

Näherungsverfahren von Newton:

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = 2,2 - \frac{2 * 2,2 * \sin 2,2 + 2,2^2 * \cos 2,2}{2 * \sin 2,2 + 4 * 2,2 * \cos 2,2 - 2,2^2 * \sin 2,2}$$

$$x_2 = 2,2 - (-0,09) = 2,29$$

$$f_{(2,29)} = 2,29^2 * \sin 2,29 = 3,95$$

$$x_3 = 5,07 - \frac{2 * 5,07 * \sin 5,07 + 5,07^2 * \cos 5,07}{2 * \sin 5,07 + 4 * 5,07 * \cos 5,07 - 5,07^2 * \sin 5,07}$$

$$x_2 = 5,07 - (-0,02) = 5,09$$

$$f_{(5,09)} = 5,09^2 * \sin 5,09 = - 24,08$$

$$f'_{(2,29)} = 2 * \sin 2,29 + 4 * 2,29 * \cos 2,29 - 2,29^2 * \sin 2,29 < 0$$

--> **Hochpunkt (2,29|3,95)**

$$f'_{(5,09)} = 2 * \sin 5,09 + 4 * 5,09 * \cos 5,09 - 5,09^2 * \sin 5,09 > 0$$

--> **Tiefpunkt (5,09|- 24,08)**

Wendepunkte:

$$2 * \sin x + 4 * x * \cos x - x^2 * \sin x = 0$$

Wertetabelle:

0	1	2	3	4	5	6	2π
0	3	-5,15	-12,9	0,1	27,7	32,5	25,1

Wendepunkt $x_1 = 0$ siehe oben.

Vorzeichenwechsel zwischen 1 und 2, gewählt Nullstelle $x_{02} = 1,4$

Vorzeichenwechsel zwischen 3 und 4, gewählt Nullstelle $x_{03} = 4$

Näherungsverfahren von Newton:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = 1,4 - \frac{2 * \sin 1,4 + 4 * 1,4 * \cos 1,4 - 1,4^2 * \sin 1,4}{6 * \cos 1,4 - 6 * 1,4 * \sin 1,4 - 1,4^2 * \cos 1,4} =$$

$$x_2 = 1,4 - (- 0,13) = 1,53$$

$$f_{(1,53)} = 1,53^2 * \sin 1,53 = 2,34$$

$$x_3 = 4 - \frac{2 * \sin 4 + 4 * 4 * \cos 4 - 4^2 * \sin 4}{6 * \cos 4 - 6 * 4 * \sin 4 - 4^2 * \cos 4} = 4 - 0,005 = 3,995$$

$$f_{(3,995)} = 3,995^2 * \sin 3,995 = -12$$

$$f'''_{(1,53)} = 6 * \cos 1,53 - 6 * 1,53 * \sin 1,53 - 1,53^2 * \cos 1,53 \neq 0$$

--> **WP₂ (1,53|2,34)**

$$f'''_{(3,995)} = 6 * \cos 3,995 - 6 * 3,995 * \sin 3,995 - 3,995^2 * \cos 3,995 \neq 0$$

--> **WP₃ (3,995|-12)**

Graph:

