Kurven Aufgabe 81

Die Tabelle zeigt die Kosten $K_{(x)}$ eines Betriebes abhängig von der gefertigten Menge x.

x	0	2	5	8
$K_{(x)}$	64/3	31	24,25	40

a) Ermitteln Sie die ganzrationale Kostenfunktion 3. Grades.
b) Wie groß sind das Kostenminimum und -maximum?
c) Wo liegt die Gewinnschwelle, wenn die Gewinngrenze 8 ME und der Erlös 5 GE/ME betragen?
d) Wie groß ist der maximale Gewinn?

a)

Allgemeine Funktion: (Die zu emittelnde Funktion ist keine typische Kostenfunktion, da sie nicht monoton ansteigt. Sie hat lokale Extrempunkte.)

$K_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$K_{(0)} = 64/3$ --> $d = 64/3$

$K_{(2)} = 31 = a * 2^3 + b * 2^2 + c * 2 + 64/3 \mid - (64/3)$

$8a + 4b + 2c = (29/3)$ (1)

$K_{(5)} = 24{,}25 = a * 5^3 + b * 5^2 + c * 5 + 64/3 \mid - (64/3)$

$125a + 25b + 5c = (35/12)$ (2)

$K_{(8)} = 40 = a * 8^3 + b * 8^2 + c * 8 + 64/3 \mid -(64/3)$

$512a + 64b + 8c = (56/3)$ (3)

3 + 1 * (-4)
$512a + 64b + 8c = (56/3)$
$-32a - 16b - 8c = - (116/3)$

$480a + 48b = - 20$ (4)

2 * 2 + 1 * (-5)

$250a + 50b + 10c = (35/6)$
$- 40a - 20b - 10c = - (145/3)$

$210a + 30b = - (255/6)$ (5)

4 * (-30) + 5 * 48

$- 14\,400a - 1\,440b = 600$
$10\,080a + 1\,440b = - 2\,040$

$- 4\,320a = - 1\,440 \mid : - 4320$

$a = 1/3$

In (4) eingesetzt:

$480/3 + 48b = - 20 \mid -160$

$48b = - 180 \mid :48$

$b = - 3,75$

a und b in (1) eingesetzt:

$8/3 - 4 * 3,75 + 2c = 29/3 \mid -8/3$

$- 15 + 2c = 7 \mid +15$

$2c = 22 \mid :2$

$c = 11$

$K_{(x)} = (1/3)x^3 - 3,75x^2 + 11x + 64/3$

b)

$K'_{(x)} = x^2 - 7,5x + 11$

$K''_{(x)} = 2x - 7,5$

$x^2 - 7,5x + 11 = 0$

p, q - Formel:

$p = - 7,5,\ q = 11$

$x_{1,2} = \frac{-(-7,5)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7,5}{2}\right)^2 - 11}$

$x_{1,2} = 3,75 \pm \sqrt{3,0625}$

$x_{1,2} = 3,75 \pm 1,75$

$x_1 = 5,5,\ K_{(5,5)} = (1/3) * 5,5^3 - 3,75 * 5,5^2 + 11 * 5,5 + 64/3 = 23,85$

$x_2 = 2,\ K_{(2)} = (1/3) * 2^3 - 3,75 * 2^2 + 11 * 2 + 64/3 = 31$

$K''_{(5,5)} = 2 * 5{,}5 - 7{,}5 > 0$ --> **Tiefpunkt (5,5|23,85)**

$K''_{(2)} = 2 * 2 - 7{,}5 <$ ---> **Hochpunkt (2|31)**

c)

$E_{(x)} = 5x$

$G_{(x)} = E_{(x)} - K_{(x)}$

$G_{(x)} = 5x - ((1/3)x^3 - 3{,}75x^2 + 11x + 64/3)$

$G_{(x)} = - (1/3)x^3 + 3{,}75x^2 - 6x - 64/3$

$G'_{(x)} = - x^2 + 7{,}5x - 6$

$G''_{(x)} = - 2x + 7{,}5$

Nullstellen:

$x_1 = 8$

Hornerschema:

	- 1/3	3,75	- 6	- 64/3
$x_1 = 8$		- 8/3	104/12	64/3
	- 1/3	13/12	8/3	0

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
- 1/3x^3 + 3{,}75x^2 - 6x - 64/3 : (x - 8) = - (1/3)x^2 + (13/12x + 8/3 \\
-(- 1/3x^3 - 8/3x^2) \\
\hline
\qquad (13/12)x^2 - \quad 6x \qquad - 64/3 \\
\qquad -((13/12)x^2 - (104/12)x) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad (8/3)x - 64/3 \\
\qquad\qquad\qquad -((8/3)x - 64/3) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$- (1/3)x^2 + (13/12)x + 8/3 = 0 \mid * (-3)$

$x^2 - 3{,}25x - 8 = 0$

p, q - Formel:

$p = - 3{,}25,\ q = - 8$

$x_{1,2} = \frac{-(-3,25)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5,25}{2}\right)^2 - (-8)}$

$x_{1,2} = 1,625 \pm \sqrt{10,64}$

$x_{1,2} = 1,625 \pm 3,26$

$x_1 = 4,89$ Gewinnschwelle

$x_2 = - 1,635$ keine Lösung

d)

$G'_{(x)} = - x^2 + 7,5x - 6 = 0 \mid :(- 1)$

$x^2 - 7,5x + 6 = 0$

p, q - Formel:

$p = - 7,5,\ q = 6$

$x_{1,2} = \frac{-(-7,5)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7,5}{2}\right)^2 - 6}$

$x_{1,2} = 3,75 \pm \sqrt{8,0625}$

$x_{1,2} = 3,75 \pm 2,84$

$x_1 = 6,59$

$G_{(6,59)} = - (1/3) * 6,59^3 + 3,75 * 6,59^2 - 6 * 6,59 - 64/3 = 6,58$ GE

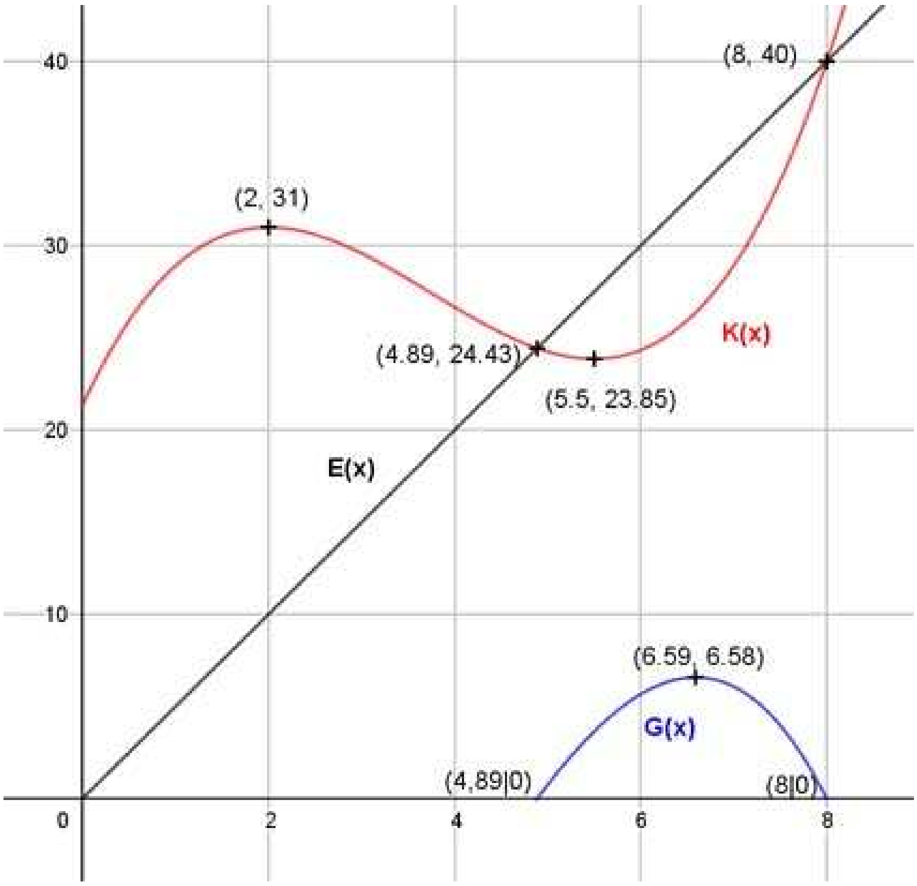
$x_2 = 0,91$

$G_{(0,91)} = - (1/3) * 0,91^3 + 3,75 * 0,91^2 - 6 * 0,91 - 64/3 = - 23,94$ GE

--> Verlust

$G''_{(563)} = - 2 * 6,59 + 7,5 < 0$ --> Hochpunkt (6,59|6,58)

Bei 6,59 ME ist der Gewinn am größten und beträgt 6,58 GE.


(8, 40)
(2, 31)
K(x)
(4.89, 24.43)
(5.5, 23.85)
E(x)
(6.59, 6.58)
G(x)
(4,89|0)
(8|0)
40
30
20
10
0
2
4
6
8