Kurven Aufgabe 85

Die Kostenfunktion $K_{(x)} = 0{,}5x^3 - 8{,}25x^2 + 50{,}375x + 20$
gibt die Kosten in 1000 € an, die für x Einheiten zu je 10 000 Stück bei der Herstellung anfallen.
a) Bei welcher Produktionsmenge sind die Stückkosten am niedrigsten?
b) Bei welcher sind die Grenzkosten am niedrigsten?
c) Für welche Produktionsmenge ist bei einem Stückpreis von 2,20 € der Ertrag positiv?
d) Für welche Produktionsmenge ist bei einem Stückpreis von 2,20 € der Ertrag am größten?

a)

$$k_{(x)} = \frac{K_{(x)}}{x} = \frac{0{,}5x^3 - 8{,}25x^2 + 50{,}375x + 20}{x}$$

$$k_{(x)} = 0{,}5x^2 - 8{,}25x + 50{,}375 + \frac{20}{x}$$

$$k'_{(x)} = x - 8{,}25 - \frac{20}{x^2}$$

$$k''_{(x)} = 1 + \frac{40}{x^3} \quad \text{immer} > 0 \text{ für } x > 0$$

$$x - 8{,}25 - \frac{20}{x^2} = 0 \mid *x^2$$

$$x^3 - 8{,}25x^2 - 20 = 0$$

Newtonsches Näherungsverfahren:

Wertetabelle:

x	6	7	8	9
$k'_{(x)}$	-101,25	-81,25	-36	40,75

Vorzeichenwechsel zwischen 8 und 9, gewählt $x_{01} = 8{,}5$

$$x_1 = 8{,}5 - \frac{0{,}5 * 8{,}5^2 - 8{,}25 * 8{,}5 + 50{,}375 + \frac{20}{8{,}5}}{8{,}5 - 8{,}25 - \frac{20}{8{,}5^2}} = 8{,}5 - (-0{,}03) = 8{,}53$$

k''(8,53) > 0 --> Tiefpunkt (8,53|18,73)

18,73 steht für 18,73 * 1 000 = 18 730 € /10 000 Stück -->

Stückkosten = 1,873 €.

Bei einer Produktionsmenge x = 8,53, entspricht 8,53 * 10 000 = 85 300 Stück, sind die Stückkosten am niedrigsten und betragen 1,873 €.

b)

Grenzkosten entsprechen $K'_{(x)}$.

$K'_{(x)} = 1{,}5x^2 - 16{,}5x + 50{,}375$

$K''_{(x)} = 3x - 16{,}5$

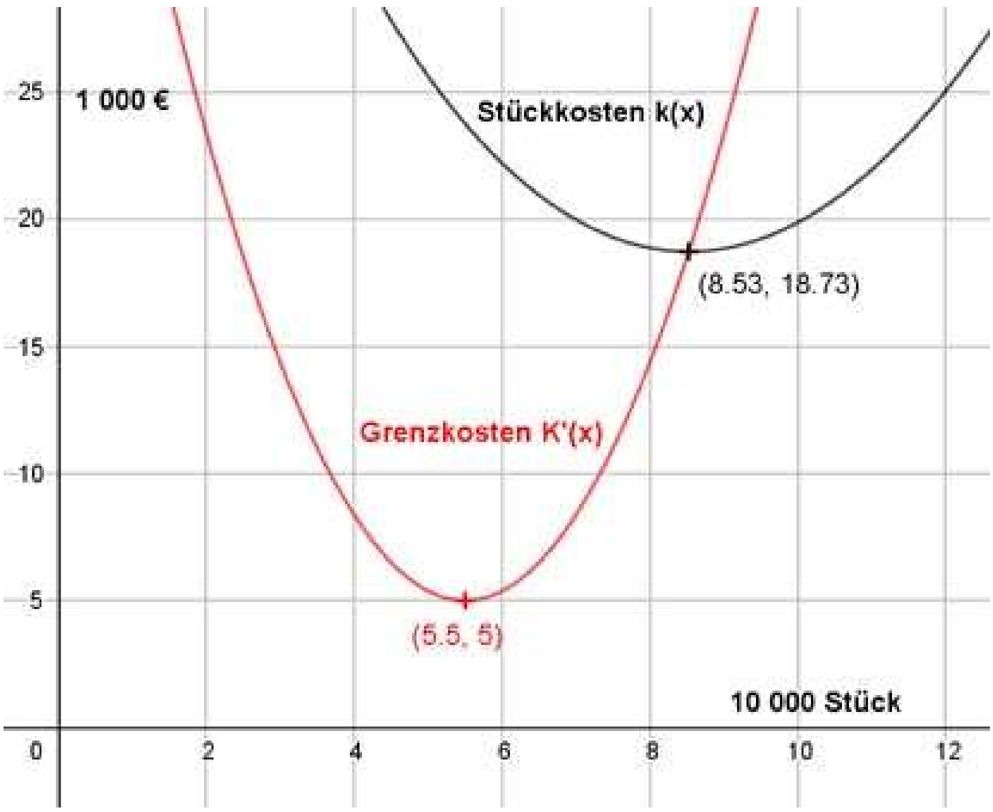
$3x - 16{,}5 = 0 \mid +16.5$

$3x = 16{,}5 \mid :3$

$x = 5{,}5$, $K'_{(5,5)} = 1{,}5 * 5{,}5^2 - 16{,}5 * 5{,}5 + 50{,}375 = 5$

$K'''_{(x)} = 3 > 0$ --> Tiefpunkt (5,5|5)

Bei einer Produktionsmenge von 5,5 * 10 000 = 55 000 Stück sind die Grenzkosten am niedrigsten.



c)

10 000 Stück kosten 2,2 €/Stück * 10 000 Stück = 22 000 €

Eine Einheit von 1 000 kostet 22 000 €/1 000 = 22 €/Einheit = Erlös $E_{(x)}$

Der Ertrag ist zwischen Gewinnschwelle und Gewinngrenze positiv.

$G_{(x)} = 22x - (0{,}5x^3 - 8{,}25x^2 + 50{,}375x + 20)$

$G_{(x)} = - 0{,}5x^3 + 8{,}25x^2 - 28{,}375x - 20$

Newtonsches Näherungsverfahren:

Wertetabelle:

x	5	6	7	8	9	10	11	12
$G_{(x)}$	-18,125	-1,25	14,125	25	28,375	21,25	0,625	-36,5

Vorzeichenwechsel zwischen 6 und 7 --> gewählt $x_{01} = 6$

Vorzeichenwechsel zwischen 11 und 12 --> gewählt $x_{02} = 11$

Newton Näherungsverfahren:

$$x_1 = 6 - \frac{- 0{,}5 * 6^3 + 8{,}25 * 6^2 - 28{,}375 * 6 - 20}{-1{,}5 * 6^2 + 16{,}5 * 6 - 28{,}375} = 6 - (-0{,}08) = 6{,}08$$

$$x_2 = 11 - \frac{- 0{,}5 * 11^3 + 8{,}25 * 11^2 - 28{,}375 * 11 - 20}{-1{,}5 * 11^2 + 16{,}5 * 11 - 28{,}375}\ 11 - (-0{,}02) = 11{,}02$$

Der Ertrag ist zwischen einer Produktionsmenge von 6,08 und 11,02 positiv.

d)

$G'_{(x)} =- 1{,}5x^2 + 16{,}5x - 28{,}375$

$G''_{(x)} = - 3x + 16{,}5$

$-1{,}5x^2 + 16{,}5x - 28{,}375 = 0$

A, B, C - Formel:

A = -1,5, B = 16,5, C = - 28,375

$$x_{1,2} = \frac{-16,5 \pm \sqrt{16,5^2 - 4*(-1,5)*(-28,375)}}{2*(-1,5)} = \frac{-16,5 \pm \sqrt{102}}{-3}$$

$$x_{1,2} = \frac{-16,5 \pm 10,1}{-3}$$

$x_1 = 8,87$

$G_{(8,87)} = -0,5 * 8,87^3 + 8,25 * 8,87 - 28,375 * 8,87 - 20 = 28,47$

$x_2 = 2,13$

$G_{(2,13)} = -0,5 * 2,13^3 + 8,25 * 2,13^2 - 28,375 * 2,13 - 20 = -47,8$

--> Verlust

$G''_{(8,87)} = -3 * 8,87 + 16,5 < 0$ --> Hochpunkt (8,87|28,47)

Bei einer Produktionsmenge von 8,87 * 10 000 = 88 700 Stück ist der Ertrag am größten.