

Lineare Gleichungssysteme Aufgabe 109

Gesucht sind die Koeffizienten der Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wenn $f(1) = 4,5$, $f(-1) = 0,5$, $f(-5) = -103,5$ und $f(3) = 40,5$.

$$f(1) = a + b + c + d = 4,5$$

$$f(-1) = -a + b - c + d = 0,5$$

$$f(-5) = -125a + 25b - 5c + d = -103,5$$

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 40,5$$

Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4,5 & (1) \text{ erste Zeile der Lösungsmatrix} \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0,5 & (2) \\ -125 & 25 & -5 & 1 & -103,5 & (3) \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 40,5 & (4) \end{array}$$

Mit (1) aus (2), (3) und (4) a eliminieren

$$(1) + (2)$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4,5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0,5 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

$$(1) * 125 + (3)$$

$$\begin{array}{cccccc} 125 & 125 & 125 & 125 & 562,5 \\ -125 & 25 & -5 & 1 & -103,5 \\ \hline 0 & 150 & 120 & 126 & 459 \end{array}$$

$$(1) * (-27) + (4)$$

$$\begin{array}{cccccc} -27 & -27 & -27 & -27 & -121,5 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 40,5 \\ \hline 0 & -18 & -24 & -26 & -81 \end{array}$$

Matrix 1

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4,5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 & (5) \text{ zweite Zeile der Lösungsmatrix} \\ 0 & 150 & 120 & 126 & 459 & (6) \\ 0 & -18 & -24 & -26 & -81 & (7) \end{array}$$

Mit (5) aus (6) und (7) b eliminieren

$$(5) * (-75) + (6)$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad -150 \quad 0 \quad -150 \quad -375 \\ 0 \quad 150 \quad 120 \quad 126 \quad 459 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 120 \quad -24 \quad 84 \end{array}$$

$$(5) * 9 + (7)$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 18 \quad 0 \quad 18 \quad 45 \\ 0 \quad -18 \quad -24 \quad -26 \quad -81 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -24 \quad -8 \quad -36 \end{array}$$

Matrix 2

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4,5 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \\ 0 \quad 0 \quad 120 \quad -24 \quad 84 \quad (8) \text{ dritte Zeile der Lösungsmatrix} \\ 0 \quad 0 \quad -24 \quad -8 \quad -36 \quad (9) \end{array}$$

Aus (8) und (9) c eliminieren

$$(8) + (9) * 5$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 120 \quad -24 \quad 84 \\ 0 \quad 0 \quad -120 \quad -40 \quad -180 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -64 \quad -96 \quad \text{vierte Zeile der Lösungsmatrix} \end{array}$$

Lösungsmatrix

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4,5 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \\ 0 \quad 0 \quad 120 \quad -24 \quad 84 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad -64 \quad -96 \end{array}$$

4. Zeile

$$-64d = -96 \quad | \quad :(-64)$$

$$\mathbf{d = 1,5}$$

d in die 3. Zeile eingesetzt

$$120c - 24 * 1,5 = 84 \quad | \quad +$$

$$120c = 120 \quad | \quad :120$$

$$\mathbf{c = 1}$$

c und d in die 2. Zeile eingesetzt

$$2b + 2 * 1,5 = 5 \quad | \quad -3$$

$$2b = 2 \quad | \quad :2$$

$$\mathbf{b = 1}$$

b, c und d in die 1. Zeile eingesetzt

$$a + 1 + 1 + 1,5 = 4,5 \quad | \quad -3,5$$

$$\mathbf{a = 1}$$