Trigonometrische Funktionen Aufgabe 224

Ergänzen Sie die Wertetabelle für x zwischen 0 und 2π:

$y = \sin 2x - \sin x$

x	2	3,5 oder 4,71
y	-1,67	1

Periode = 2π

Berechnung der Nullstellen:

$0 = \sin 2x - \sin x$

mit

$\sin 2x = 2 * \sin x * \cos x$

$2 \sin x * \cos x - \sin x = 0$

$\sin x * (2 * \cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0 \rightarrow x = 0 + k * \pi$ mit k =1, 2, 3,...

$2 * \cos x - 1 = 0 \mid +1$

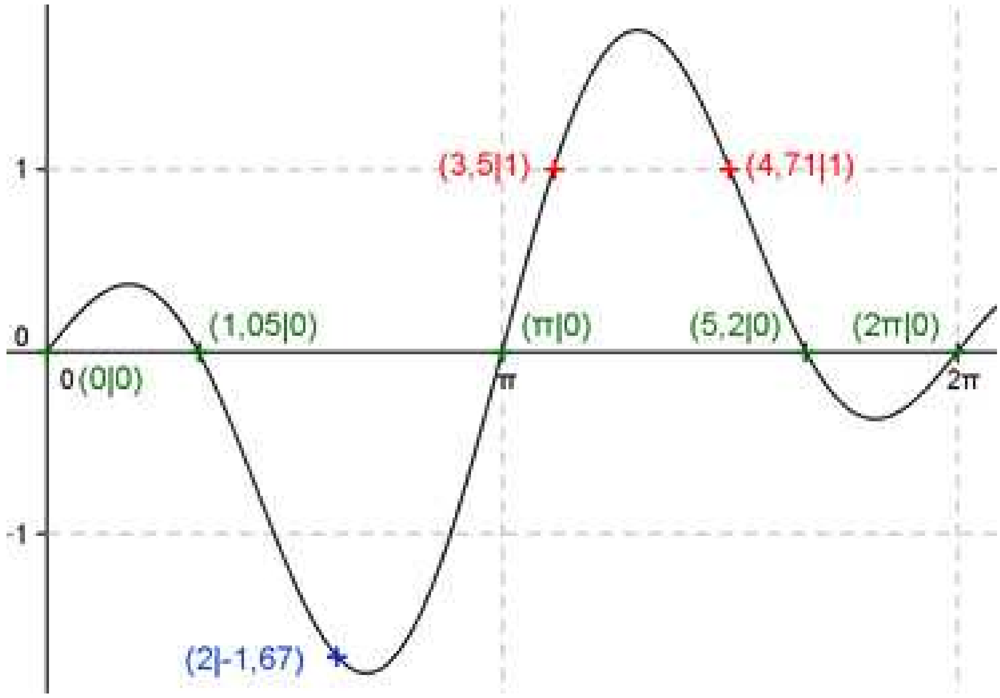
$2 * \cos x = 1 \mid :2$

$\cos x = 0{,}5 \rightarrow \arccos 0{,}5 = 1{,}05$ gerundet

N_1 liegt bei 0 oder 0°, N_2 bei π oder 180°, N_3 bei 2π oder 360°.

N_4 liegt bei 1,05 gerundet oder bei 60,2°, N_5 liegt bei (2π - 1,05) = 5,2 gerundet oder bei 297,9°.

Die Amplitude wurde mit Hilfe der Differentialrechnung zu 1,76 ermittelt.



Funktionswert an einer Stelle x ermitteln:

x = 2

$f_{(2)}$ = sin (2 * 2) - sin 2 = sin (2 * 114,6°) - sin 114,6° = - 1,67 gerundet

Berechnung der x-Werte für y = $f_{(x)}$ = 1:

$f_{(x)}$ = 1 eingesetzt, existiert zweimal zwischen π und 2π bzw. 180° und 360° (siehe Graph).

An welchen Stellen x die Funktion den Wert 1 annimmt, ist elementar nicht zu ermitteln.

Zur Berechnung wendet man ein Näherungsverfahren an, hier die Regula falsi.

sin 2x - sin x = 1

mit

sin 2x = 2 sin x cos x und cos x = $\sqrt{1 - \sin^2 x}$

2 sin x$\sqrt{1 - \sin^2 x}$ - sin x = 1 | +sin x

2 sin x$\sqrt{1 - \sin^2 x}$ = 1 + sin x |²

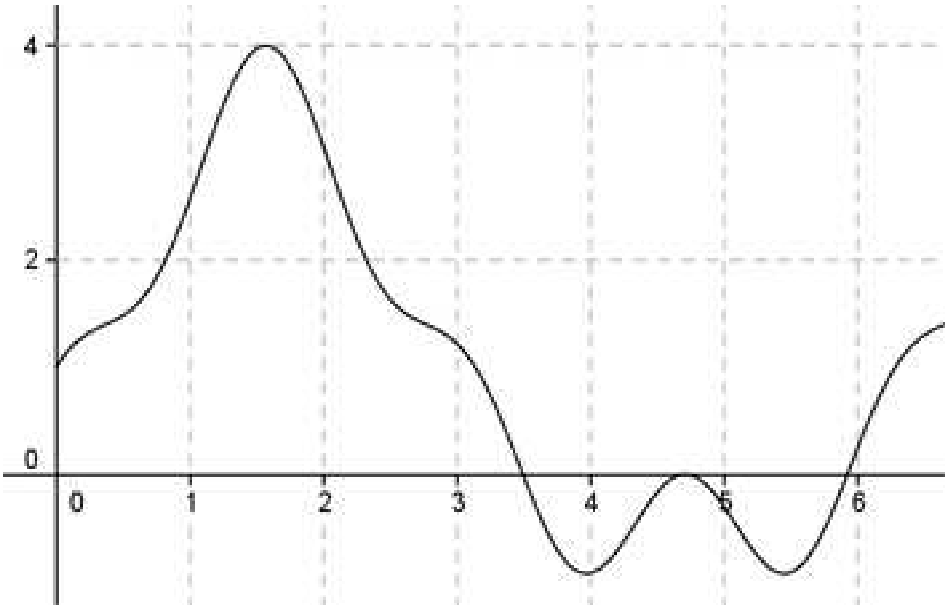
$4 \sin^2 x\ (1 - \sin^2 x) = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x$

$4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x \mid +4 \sin^4 x$

$4 \sin^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x + 4 \sin^4 x \mid -4 \sin^2 x$

$4 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 0$

Als Funktion: $y = 4 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 2 \sin x + 1$



Abgelesen: Nullstellen zwischen 3,4 und 3,6, zwischen 4,6 und 4,8 und

zwischen 5,6 und 6.

(Vorzeichenwechsel für $f_{(x)}$, bzw. Berührpunkt)

Regula falsi: x_0 = gesuchte Nullstelle

$$x_0 = \frac{x_1\ |y(x_2)| + x_2\ |y(x_1)|}{|y(x_1)| + |y(x_2)|}$$

Nullstelle x_0 zwischen 3,4 und 3,6 mit Excel ermittelt:

3,4	3,6	0,319125222	0,310071047	1,085025755	1,116255769	2,201281524	0,629196269	3,498560994	-0,005547127
3,4	3,498560994	0,005547127	507,6544	0,018860231	1776,059882	1776,078742	507,6599471	3,498559917	-0,005543682
3,4	3,498559917	0,005543682	507,6544	0,018848518	1776,059335	1776,078184	507,6599437	3,49855884	-0,005540239
3,4	3,49855884	0,005540239	507,6544	0,018836813	1776,058789	1776,077626	507,6599402	3,498557765	-0,005536798

Die gesuchte Nullstelle ergibt sich nach mehreren Näherungen mit ausreichender Genauigkeit zu x_{01} = 3,5 gerundet.

Nullstelle x_{02} zwischen 4,6 und 4,8 ergibt sich nach dem selben Verfahren zu 4,7 gerundet.

Nullstelle x_{03} zwischen 5,6 und 6 ergibt sich nach dem selben Verfahren zu 5,93 gerundet.

Weil zwischendurch quadriert wurde, ist eine Probe nötig.

Für x_{01}: $\sin(2 * 3{,}5) - \sin 3{,}5 = 0{,}657 - (-0{,}35) = 1$ Lösung

Für x_{02}: $\sin(2 * 4{,}71) - \sin 4{,}71 = 0{,}0048 - (-0{,}9999) = 1$ Lösung

Für x_{03}: $\sin(2 * 5{,}93) - \sin 5{,}93 = -0{,}649 - (-0{,}346) = -0{,}3$ keine Lösung

Gesuchte x-Werte: $x_1 = 3{,}5$ oder $x_2 = 4{,}71$ und $\alpha_1 = 200{,}5°$ oder $\alpha_2 = 269{,}3°$.