Trigonometrische Funktionen Aufgabe 228

Ergänzen Sie die Wertetabelle für x zwischen 0 und 2π:

y = cos x - sin 2x

x	4	0 oder 5,067 oder 2π
y	-1,64	1

Amplitude = 1,76 (Berechnung siehe unten), Periode = 2π

Berechnung der Nullstellen:

0 = cos x - sin 2x

mit

sin 2x = 2 * sin x * cos x

cos x - 2 sin x * cos x = 0

cos x * (1 - 2 sin x) = 0

cos x = 0 --> x = π/2 + k * π mit k = 1, 2, 3, ...

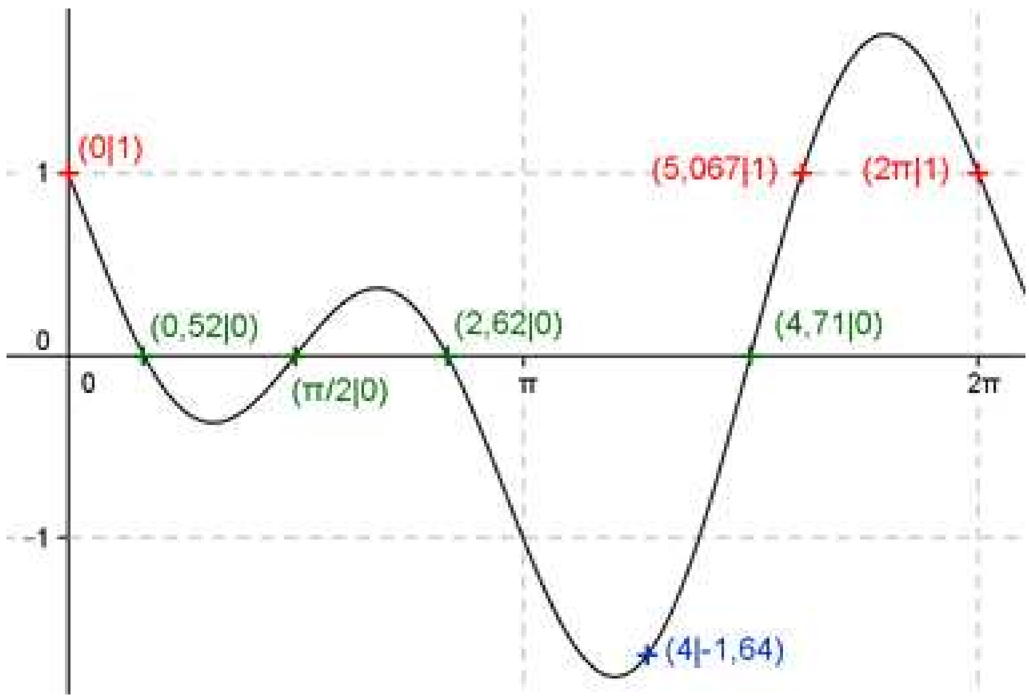
1 - 2 sin x = 0 | + 2 sin x

1 = 2 sin x |:2

sin x = 0,5 --> x = arc sin 0,5 = 0,52 gerundet

N_1 liegt bei 0,52 oder 30°, N_2 bei π/2 oder 90°, N_3 bei (π - 0,52) = 2,6 gerundet oder 150° und bei (3/2)π = 4,71 gerundet oder 270°.

Die Amplitude wurde mit Hilfe der Differentialrechnung zu 1,76 ermittelt.



Funktionswert an einer Stelle x ermitteln:

x = 4

$f_{(4)}$ = cos 4 - sin (2 * 4) = cos 229,2° - sin (2 * 229,2°) = - 1,64 gerundet

Berechnung der x-Werte für y = $f_{(x)}$ = 1:

$f_{(x)}$ = 1 eingesetzt, existiert einmal bei 0 oder 0° und zweimal zwischen π und 2π bzw. 180° und 360° (siehe Graph).

An welchen Stellen x die Funktion den Wert 1 annimmt, ist elementar nicht zu ermitteln.

Zur Berechnung wendet man ein Näherungsverfahren an, hier die Regula falsi.

cos x - sin 2x = 1

mit

sin 2x = 2 sin x cos x

cos x - 2 sin x cos x = 1 | + 2 sin x cos x

cos x = 1 + 2 sin x cos x | -1

$\cos x - 1 = 2 \sin x \cos x \;|^2$

$\cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 4 \sin^2 x \cos^2 x$

mit

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

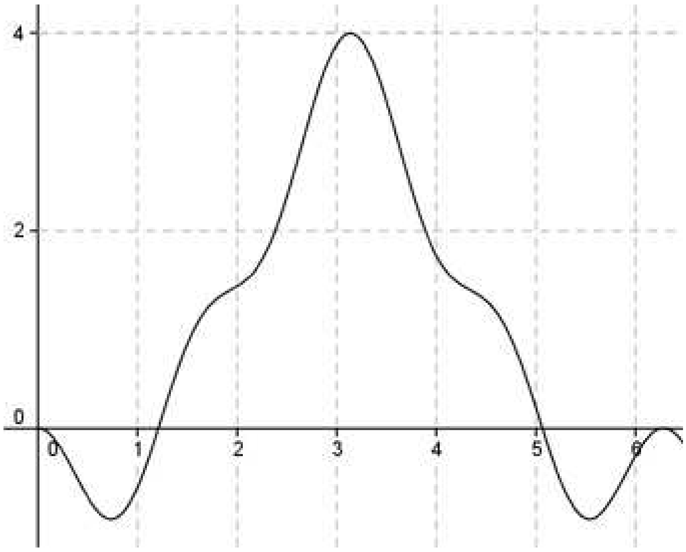
$\cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 4 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)$

$\cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 4 \cos^2 x - 4 \cos^4 x \;|+ 4\cos^4 x$

$4 \cos^4 x + \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 4 \cos^2 x \;|- 4\cos^2 x$

$4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0$

Als Funktion: $y = 4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x - 2 \cos x + 1$



Abgelesen: Nullstellen bei 0, zwischen 1 und 1,4, zwischen 5 und 5,1 und bei 2π.

0 eingesetzt:

$y = 4 \cos^4 0 - 3 \cos^2 0 - 2 \cos 0 + 1 = 4 - 3 - 2 + 1 = 0 \dashrightarrow x_{01} = 0$

2π eingesetzt:

$y = 4 \cos^4 2\pi - 3 \cos^2 2\pi - 2 \cos 2\pi + 1 = 4 - 3 - 2 + 1 = 0 \dashrightarrow x_{02} = 2\pi$

Regula falsi: x_0 = gesuchte Nullstelle

$$x_0 = \frac{x_1\,|y(x_2)| + x_2\,|y(x_1)|}{|y(x_1)| + |y(x_2)|}$$

Nullstelle x_{03} zwischen 5 und 5,1 mit Excel ermittelt:

5	5,1	0,10291289	0,217180895	0,514564449	1,107622567	1,622187016	0,320093785	5,067849145	-0,000721703
5	5,067849145	0,000721703	0,217180895	0,003608514	1,100640015	1,104248529	0,217902598	5,067624425	-2,50905E-06
5	5,067624425	2,50905E-06	0,217180895	1,25452E-05	1,10059121	1,100603756	0,217183404	5,067623644	-8,66192E-09
5	5,067623644	8,66192E-09	0,217180895	4,33096E-08	1,100591041	1,100591084	0,217180904	5,067623641	-2,99045E-11

Die gesuchte Nullstelle ergibt sich nach mehreren Näherungen mit ausreichender Genauigkeit zu x_{03} = 5,067 gerundet.

Die Nullstelle x_{04} zwischen 1,1 und 1,3 sich nach dem selben Verfahren zu 1,215 gerundet.

Weil zwischendurch quadriert wurde, ist eine Probe nötig.

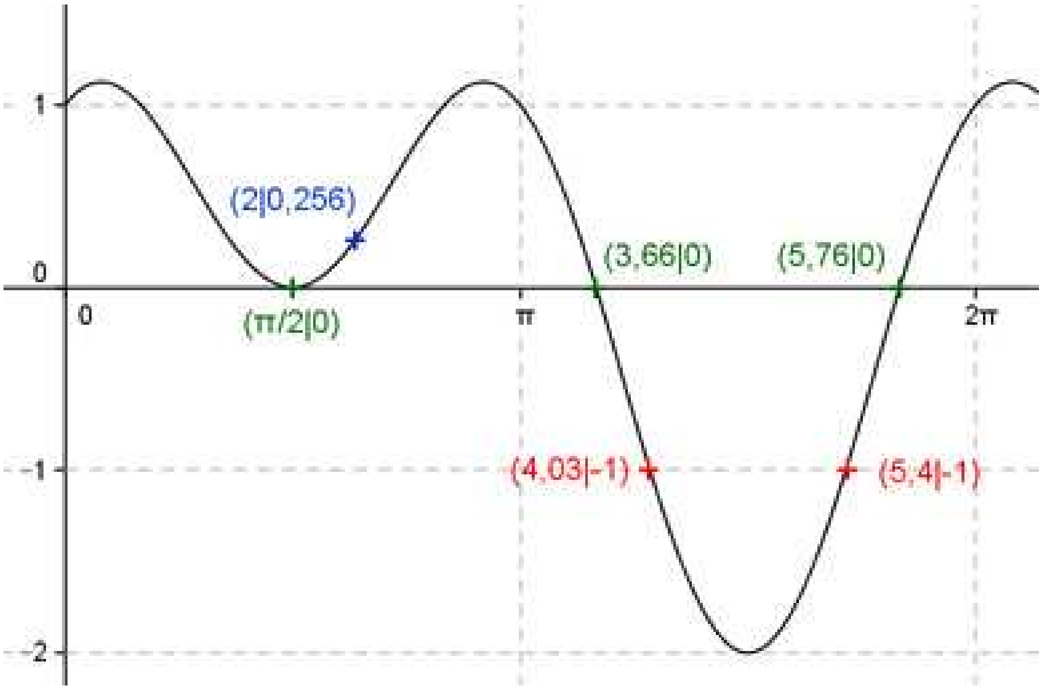
Für x_{01}: cos 0 - sin (2 * 0) = 1 - (- 0) = 1 Lösung

Für x_{02}: cos 2π - sin (2 * 2π) = 1 - (- 0) = 1 Lösung

Für x_{03}: cos 5,067 - sin (2 * 5,067) = 0,347 - (- 0,651) = 0,998 Lösung

Für x_{04}: cos 1,215 - sin (2 * 1,215) = 0,348 - 0,653 = - 0,305 keine Lösung

Gesuchte x-Werte: x_1 = 0 oder x_1 = 2π oder x_3 = 5,067 und α_1 = 0° oder α_2 = 360° oder α_3 = 290,3°.



Funktionswert an einer Stelle x ermitteln:

x = 2

$f_{(2)}$ = sin 2 + cos (2 * 2) = sin 114,6° + cos (2 * 114,6°) = 0,256

gerundet

Berechnung der x-Werte für y = $f_{(x)}$ = - 1:

$f_{(x)}$ = - 1 eingesetzt, existiert zweimal zwischen π und 2π bzw. 180° und 360° (siehe Graph).

sin x + cos 2x = - 1

mit cos 2x = 1 - 2 sin² x

sin x + (1 - 2 sin² x) = - 1

sin x + 1 - 2 sin² x = - 1 |*(-1)

2 sin² x - sin x - 1 = 1 | -1

2 sin² x - sin x - 2 = 0

A, B, C - Formel:

A = 2 ; B = - 1 ; C = - 2

$$\sin x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 + 16}}{2 * 2}$$

$$\sin x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\sin x_{1,2} = - \frac{1 \pm 4{,}12}{4}$$

$\sin x_1 = -0{,}78$ --> $x_1 = \arcsin -0{,}78 = -0{,}89$ gerundet, liegt nicht im

Bereich zwischen 0 und 2π..

$\sin x_2 = 1{,}28$ --> keine Lösung

$x_1 = (\pi + 0{,}89) = 4{,}03$ gerundet oder $x_2 = (2\pi - 0{,}89) = 5{,}4$ gerundet

und $\alpha_1 = 231°$ oder $\alpha_2 = = 309°$.