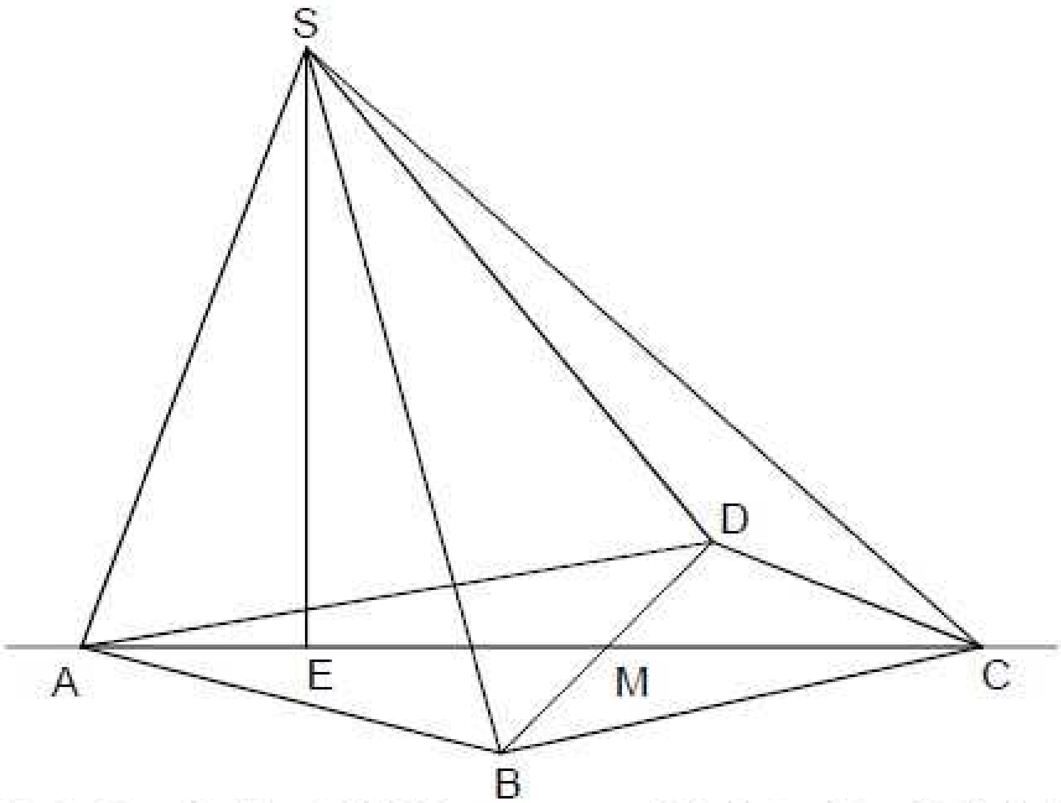
Prüfungsaufgaben Aufgabe 102a

Mathematik I **Nachtermin** **Aufgabe P 2**

P 2.0 Das Drachenviereck ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC} = 12\text{ cm}$ und $\overline{BD} = 8\text{ cm}$ ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Die Diagonalen schneiden sich im Punkt M mit $\overline{AM} = 7\text{ cm}$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt E mit $\overline{AE} = 3\text{ cm}$ und $\overline{ES} = 8\text{ cm}$, wobei E auf der Schrägbildachse AC liegt.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$



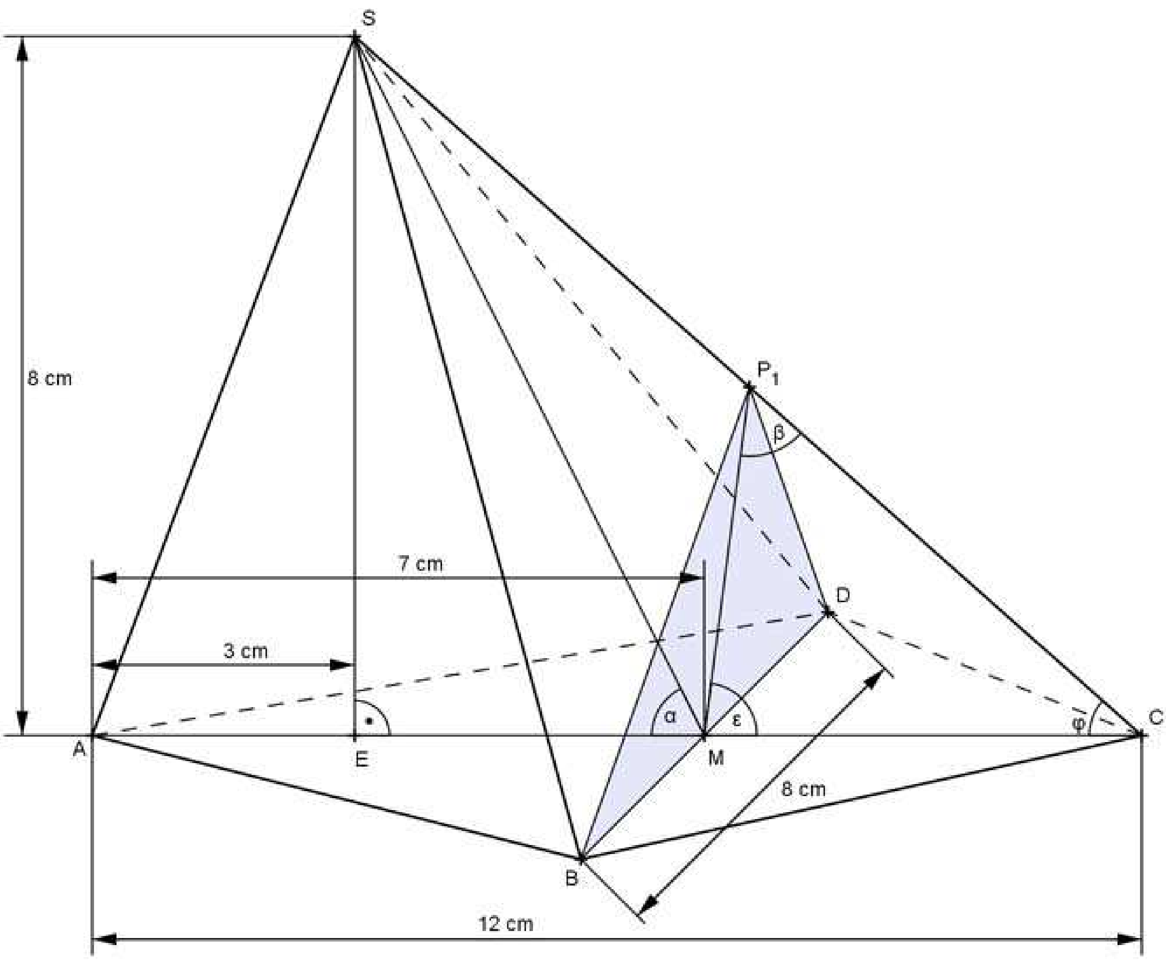
P 2.1 Punkte P_n auf der Kante [CS] bilden zusammen mit den Punkten B und D die Dreiecke BDP_n. Die Dreiecke BDP_n schließen mit der Grundfläche ABCD den Winkel CMP_n mit dem Maß ε ein.

Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 für $\overline{CP_1} = 6\text{ cm}$ in das Schrägbild zu 2.0 ein und berechnen Sie sodann das Intervall für alle möglichen Winkelmaße ε. 3 P

P 2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Dreiecke BDP_n in Abhängigkeit von ε.
[Ergebnis: $A(\varepsilon) = \frac{13,29}{\sin(\varepsilon + 41,63°)}$ cm²] 4 P

P 2.3 Unter den Dreiecken BDP_n hat das Dreieck BDP_0 den kleinsten Flächeninhalt. Bestimmen Sie das zugehörige Winkelmaß ε. 2 P

2.0, 2.1



2.1

Winkel ε entstehen dann, wenn sich P zwischen C und S einschließlich bewegt.

Im Dreieck EMS gilt:

EM = AM - AE = 7 cm - 3 cm = 4 cm

$$\tan \alpha = \frac{MS}{EM} = \frac{8\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 2 \rightarrow \alpha = 63{,}4°$$

$\varepsilon_{max} = 180° - \alpha = 180° - 63{,}43° = 116{,}6°$

$0 \leq \varepsilon \leq 116{,}6°$

2.2

Im Dreieck ECS gilt:

EC = AC - AE = 12 cm - 3 cm = 9 cm

$$\tan \varphi = \frac{ES}{EC} = \frac{8\text{ cm}}{9\text{ cm}} = 0{,}8889 \Rightarrow \varphi = 41{,}63°$$

Sinussatz im Dreieck MCP:

$\beta = 180° - (\varepsilon + \varphi) = 180° - (\varepsilon + 41{,}63°)$

$\sin \beta = \sin (180° - (\varepsilon + 41{,}63°)) = \sin (\varepsilon + 41{,}63°)$

$MC = AC - AM = 12\text{ cm} - 7\text{ cm} = 5\text{ cm}$

$$\frac{MP}{\sin \varphi} = \frac{MC}{\sin \beta} \quad | \cdot \sin \varphi$$

$$MP = \frac{MC \cdot \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{5\text{ cm} \cdot \sin 41{,}63°}{\sin (\varepsilon + 41{,}63°)} = \frac{3{,}32\text{ cm}}{\sin (\varepsilon + 41{,}63°)}$$

$$\mathbf{A_{BDP}} = \frac{BC \cdot MP}{2} = \frac{8\text{ cm} \cdot 3{,}32\text{ cm}}{2 \cdot \sin (\varepsilon + 41{,}63°)} = \mathbf{\frac{13{,}28\text{ cm}^2}{\sin (\varepsilon + 41{,}63°)}}$$

2.3

Der kleinste Flächeninhalt entsteht dann, wenn $\sin (\varepsilon + 41{,}63°) = 1$ ist.

$\Rightarrow \varepsilon + 41{,}63° = 90° \quad | -41{,}63°$

$\boldsymbol{\varepsilon = 48{,}37°}$