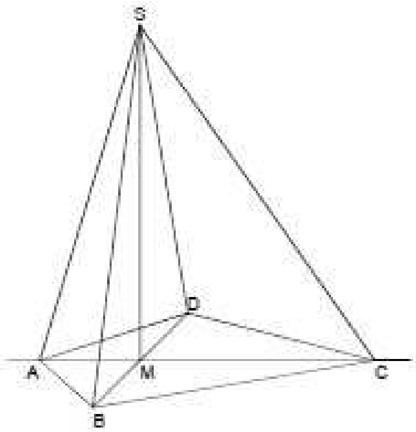
Prüfungsaufgaben Aufgabe 107

Prüfungsdauer: 150 Minuten	**Abschlussprüfung 2007** an den Realschulen in Bayern	**R4/R6**

Mathematik II **Haupttermin** **Aufgabe A 2**

A 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, deren Grundfläche ein Drachenviereck mit der Symmetrieachse AC ist. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M und es gilt: $\overline{AC} = 10\text{ cm}$; $\overline{AM} = 3\text{ cm}$; $\overline{BD} = 8\text{ cm}$ und $\overline{MS} = 10\text{ cm}$.



A 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann das Maß α des Winkels CAS und das Maß φ des Winkels BSD.
[Teilergebnisse: $\alpha = 73{,}3°$; $\varphi = 43{,}6°$] 4 P

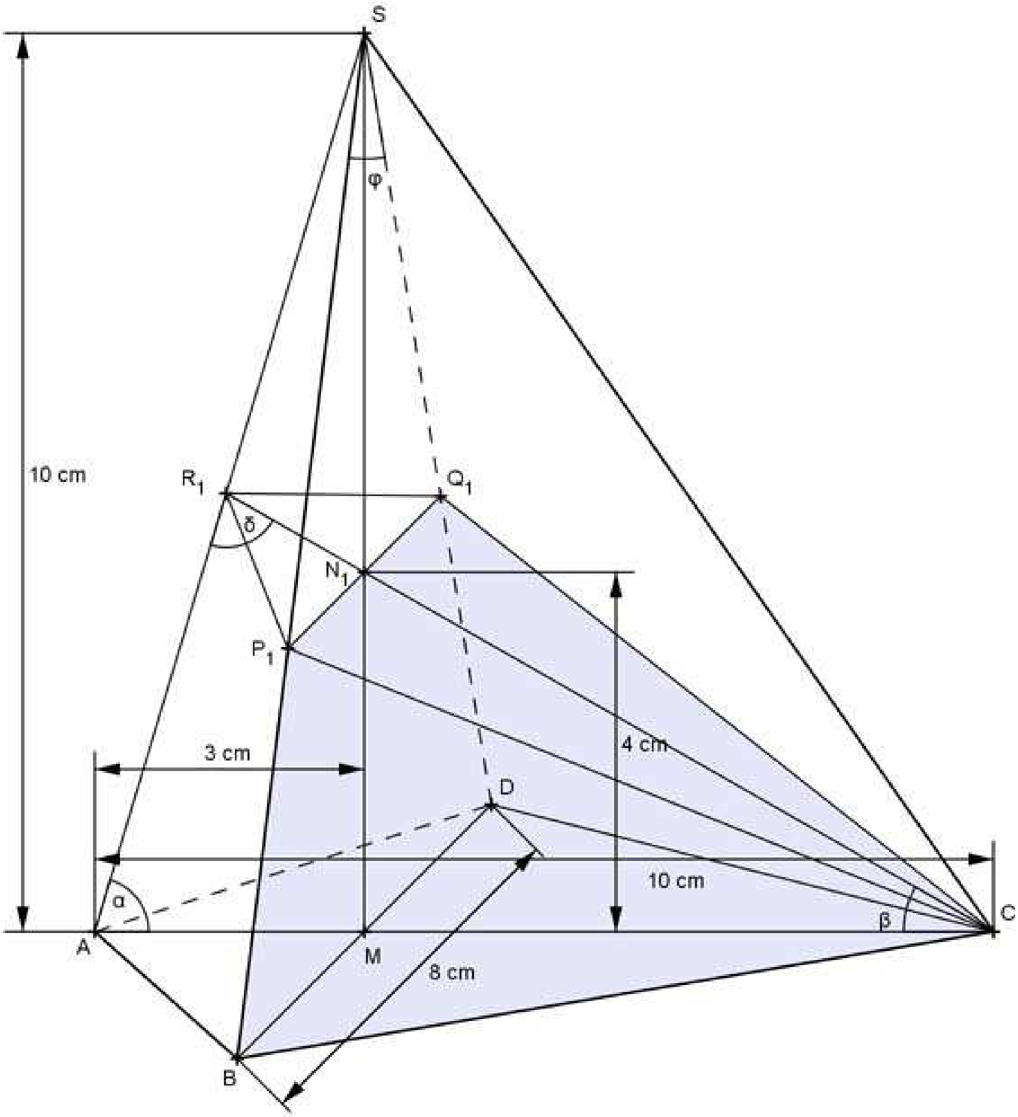
A 2.2 $P_n \in [BS]$, $Q_n \in [DS]$ und $R_n \in [AS]$ sind zusammen mit C Eckpunkte von Drachenvierecken $CQ_nR_nP_n$. Punkte $N_n \in [MS]$ sind die Mittelpunkte der Diagonalen $[P_nQ_n]$. Es gilt: $[P_nQ_n] \parallel [BD]$ und $\overline{MN_n} = x\text{ cm}$ mit $0 < x < 10$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeichnen Sie für $x = 4$ das Drachenviereck $CQ_1R_1P_1$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Drachenvierecks $CQ_1R_1P_1$.
[Teilergebnis: $\sphericalangle SN_1CM = 29{,}7°$] 5 P

A 2.3 Der Punkt C ist die Spitze von Pyramiden BDQ_nP_nC mit der Grundfläche BDQ_nP_n.
Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Pyramiden BDQ_nP_nC in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = \left(-\frac{14}{15}x^2 + \frac{56}{3}x\right)\text{cm}^3$. 3 P

A 2.4 Tabellarisieren Sie das Volumen $V(x) = \left(-\frac{14}{15}x^2 + \frac{56}{3}x\right)\text{cm}^3$ für $x \in [0; 10]$ in Schritten von $\Delta x = 1$ auf Ganze gerundet. Zeichnen Sie sodann den Graphen zu $V(x) = y\text{ cm}^3$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Auf der x-Achse: 1 cm für 1 cm; $0 \leqq x \leqq 11$
Auf der y-Achse: 1 cm für 10 cm³; $0 \leqq y \leqq 110$ 3 P

A 2.5 Das Volumen der Pyramide BDQ_2P_2C beträgt 40,0 cm³.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x. 2 P

2.0, 2.1



2.1

Im Dreieck AMS gilt:

$$\tan \alpha = \frac{MS}{AM} = \frac{10\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 3{,}3333 \longrightarrow \boldsymbol{\alpha = 73{,}3°}$$

Im Dreieck BDS gilt:

$$\tan \varphi/2 = \frac{BD/2}{MS} = \frac{8\text{ cm}/2}{10\text{ cm}} = 0{,}4 \longrightarrow \varphi/2 = 21{,}8° \longrightarrow \boldsymbol{\varphi = 43{,}6°}$$

2.2

Im Dreieck MCS gilt:

$MC = AC - AM = 10\ cm - 3\ cm = 7\ cm$

$$\tan \beta = \frac{MN}{MC} = \frac{4\ cm}{7\ cm} = 0{,}5714 \longrightarrow \beta = 29{,}7°$$

$\delta = 180° - \alpha - \beta = 180° - 73{,}3° - 29{,}7° = 77°$

Sinussatz im Dreieck ACR_1:

$$\frac{AC}{\sin \delta} = \frac{CR_1}{\sin \alpha} \quad | * \sin \beta$$

$$CR_1 = \frac{AC * \sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{10\ cm * \sin 73{,}3°}{\sin 77°} = 9{,}8\ cm$$

Strahlensatz:

$SN_1 = MS - MN_1 = 10\ cm - 4\ cm = 6\ cm$

$$\frac{P_1Q_1}{BD} = \frac{SN_1}{MS} \quad | * BD$$

$$P_1Q_1 = \frac{SN_1 * BD}{MS} = \frac{6\ cm * 8\ cm}{10\ cm} = 4{,}8\ cm$$

$$\mathbf{A_{CQ1P1R1}} = \frac{CR_1 * P_1Q_1}{2} = \frac{9{,}8\ cm * 4{,}8\ cm}{2} = \mathbf{23{,}5\ cm^2}$$

2.3

Strahlensatz:

$$\frac{PQ}{BD} = \frac{MS - x}{MS} \quad | * BD$$

$$PQ_{(x)} = \frac{BD * (MS - x)}{MS} = \frac{8 * (10 - x)}{10}\ cm = 8 - 0{,}8x\ \ cm$$

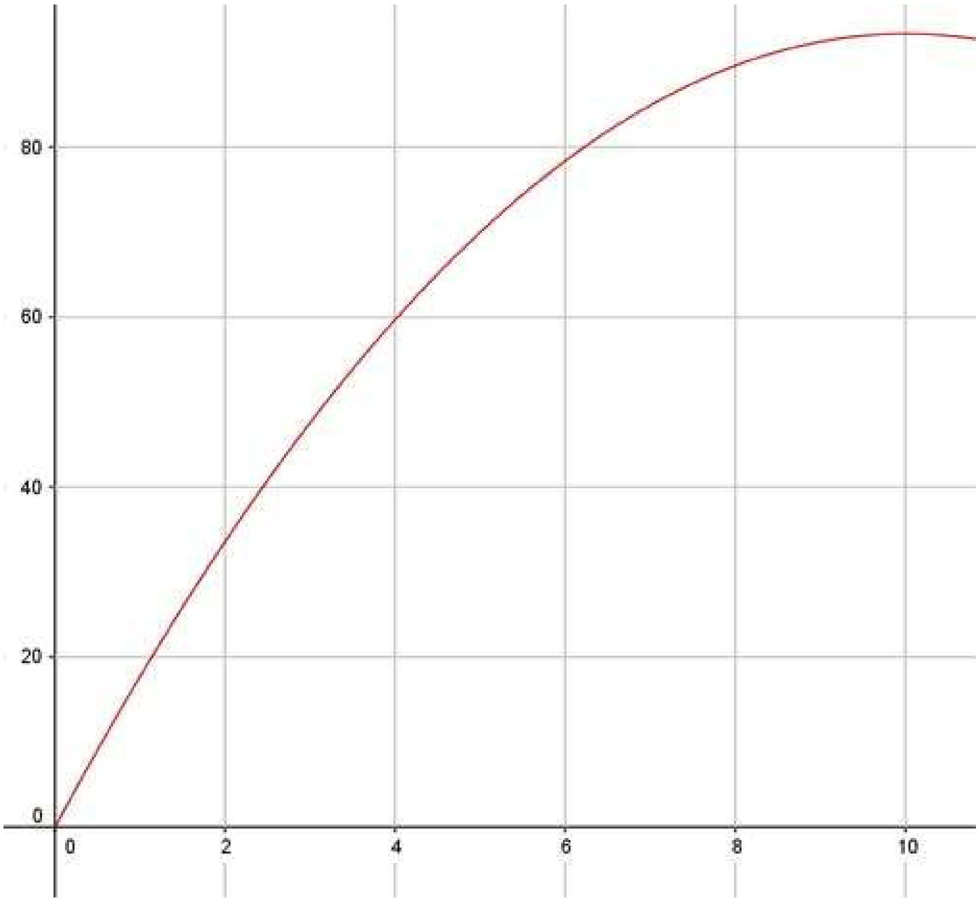
$$V_{(x)} = \frac{\frac{PQ + BD}{2} * MN * MC}{3} = \frac{(PQ + BD) * MN * MC}{6}$$

$$\mathbf{V_{(x)}} = \frac{(8 - 0,8x + 8) * x * 7}{6} = \frac{112x - 5,6x^2}{6} = \mathbf{\frac{56}{3}x - \frac{14}{15}x^2}$$

2.4

Wertetabelle zu $V_{(x)}$:

x	0	3	5	7	9	10
y	0	48	70	85	92	93



2.5

$$40 = \frac{56}{3} x - \frac{14}{15} x^2 \mid * 15$$

$$600 = 280\,x - 14x^2 \mid - 600$$

$- 14x^2 + 280x - 600 = 0 \mid * (-1)$

$14x^2 - 280x + 600 = 0$

A,B,C - Formel:

A = 14, B = - 280, C = 600

$$x_{1,2} = \frac{-(-280) \pm \sqrt{(-280)^2 - 4*14*600}}{2 * 14} = \frac{280 \pm \sqrt{44800}}{28}$$

$$x_{1,2} = \frac{280 \pm 211{,}7}{28}$$

$x_1 = 17{,}6$ cm keine Lösung > 10 cm

$x_2 = 2{,}4$ cm