Prüfungsdauer: 150 Minuten

Abschlussprüfung 2010

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

Aufgabe B 2 **Haupttermin**

B 2.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalen [AC] und [BD] ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Raute ABCD liegt. Es gilt: $\overline{AC} = 10$ cm; $\overline{BD} = 12$ cm; $\sphericalangle CAS = 60°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke [AC] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [MS].
[Ergebnis: $\overline{MS} = 8,66$ cm] 3 P

B 2.2 Parallele Ebenen zur Grundfläche der Pyramide ABCDS schneiden die Kanten der Pyramide ABCDS in den Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$, $G_n \in [CS]$ und $H_n \in [DS]$, wobei die Winkel E_nMA das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 90°[$ haben. Die Rauten $E_nF_nG_nH_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ mit der Spitze M.
Zeichnen Sie die Pyramide $E_1F_1G_1H_1M$ für $\varphi = 55°$ in das Schrägbild zu 2.1 ein. 1 P

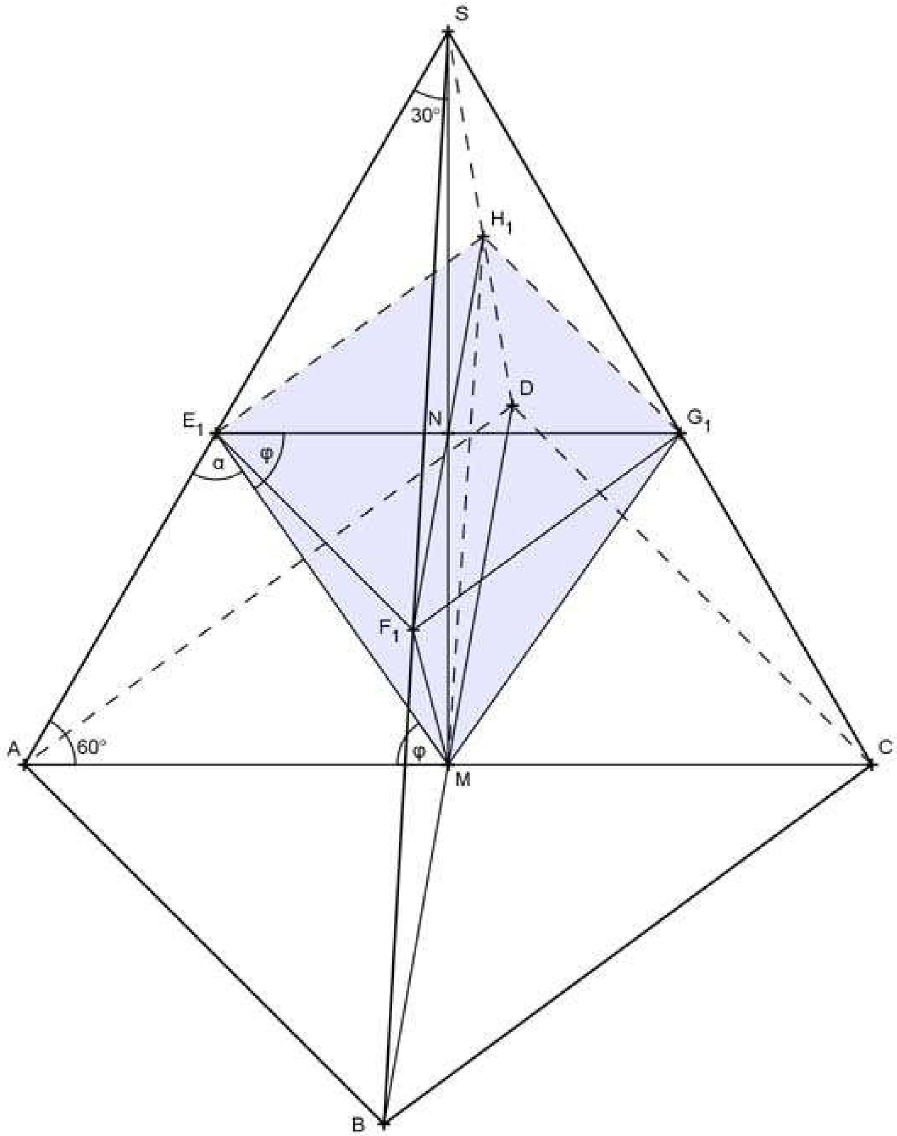
B 2.3 Berechnen Sie die Länge der Seitenkanten $[E_nM]$ der Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $\overline{E_nM}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60° + \varphi)}$ cm] 2 P

B 2.4 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Diagonalen $[E_nG_n]$ der Rauten $E_nF_nG_nH_n$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{E_nG_n}(\varphi) = \frac{8,66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}$ cm. 3 P

B 2.5 Die Punkte E_n, F_n, G_n, H_n, M und S sind die Eckpunkte von Körpern, die sich jeweils aus zwei Pyramiden zusammensetzen.
Begründen Sie, dass sich das Volumen V dieser Körper wie folgt berechnen lässt:
$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rauten } E_nF_nG_nH_n} \cdot \overline{MS}$.
Berechnen Sie sodann das Volumen V dieser Körper in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}\right)^2$ cm³] 5 P

B 2.6 Für den Körper mit den Eckpunkten E_0, F_0, G_0, H_0, M und S gilt: $\overline{E_0M} = 4,33$ cm.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens dieses Körpers am Volumen der Pyramide ABCDS. 3 P

2.0 - 2.2



2.1

Im Dreieck AMS gilt:

AM = AC/2 = 10 cm/2 = 5 cm

$$\tan 60° = \frac{MS}{AM} \quad | * AM$$

AM * tan 60° = MS

MS = 5 cm * tan 60° = **8,66 cm**

2.3

In einem beliebigen Dreieck AME gilt:

$\alpha = 180° - (60° + \varphi)$

$\sin \alpha = \sin (180° - (60° + \varphi)) = \sin (60° + \varphi)$

Sinussatz:

$$\frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{EM_{(\varphi)}}{\sin 60°} \quad | * \sin 60°$$

$$\mathbf{EM_{(\varphi)}} = \frac{AM * \sin 60°}{\sin (60° + \varphi)} = \frac{5 \text{ cm} * \sin 60°}{\sin (60° + \varphi)} = \mathbf{\frac{4{,}33 \text{ cm}}{\sin (60° + \varphi)} \text{ cm}}$$

2.4

In einem beliebigen Dreieck EMN gilt:

$EN = EG/2$

$$\cos \varphi = \frac{EN}{EM} \quad | *EM$$

$EN = EM * \cos \varphi$

$$\frac{EG}{2} = EM * \cos \varphi \quad | *2$$

$EG_{(\varphi)} = 2 * EM * \cos \varphi$

$$\mathbf{EG_{(\varphi)}} = 2 * \frac{4{,}33 \text{ cm}}{\sin (60° + \varphi)} * \cos \varphi = \mathbf{\frac{8{,}66 * \cos \varphi}{\sin(60° + \varphi)} \text{ cm}}$$

2.5

Der Körper besteht aus den beiden Pyramiden EFGHM und EFGHS. Sie haben die selbe Grundfläche A_{EFGH}. Die Pyramide EFGHS hat die Höhe SN, die Pyramide EFGHM hat die Höhe MN. MN + SN = MS. -->

$$\mathbf{V = \frac{A_{EFGH} * MS}{3}}$$

In einem beliebigen Dreieck ENS gilt:

$$\tan 30° = \frac{EN}{NS} \quad | *NS$$

$NS * \tan 30° = EN \mid :\tan 30°$

$$NS = \frac{EN}{\tan 30°} = \frac{EG/2}{\tan 30°} = \frac{4{,}33 * \cos \varphi}{\tan 30° * \sin (60° + \varphi)} = \frac{7{,}5 * \cos \varphi}{\sin (60° + \varphi)}$$

Strahlensatz:

$$\frac{FH}{NS} = \frac{BD}{MS} \mid * NS$$

$$FH = \frac{BD * NS}{MS} = \frac{12 * 7{,}5 * \cos \varphi}{8{,}66 * \sin (60° + \varphi)} \text{ cm}$$

$$FH = \frac{10{,}39 * \cos \varphi}{\sin (60° + \varphi)}$$

$$V = \frac{0{,}5 * EG * FH * MS}{3} = \frac{0{,}5 * 8{,}66 * \cos \varphi * 10{,}39 * \cos \varphi) * 8{,}66}{3 * \sin^2 (60° + \varphi)} \text{ cm}^3$$

$$\mathbf{V_{(\varphi)} = 129{,}87 * \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 (60° + \varphi)} \text{ cm}^3}$$

2.6

$$V_{ABCDS} = \frac{0{,}5 * AC * BD * MS}{3} = \frac{0{,}5 * 10 \text{ cm} * 12 \text{ cm} * 8{,}66 \text{ cm}}{3} = 173{,}2 \text{ cm}^3$$

$$4{,}33 = \frac{4{,}33}{\sin (60° + \varphi)} \mid :4{,}33$$

$$1 = \frac{1}{\sin (60° + \varphi)} \mid * \sin (60° + \varphi)$$

$\sin (60° + \varphi) = 1$ -->

$60° + \varphi = 90° \mid -60°$

$\varphi = 30°$

$$V_{E0F0G0H0M,S} = 129{,}87 * \frac{\cos^2 30°}{\sin^2 (60° + 30°)} \text{ cm}^3 = 97{,}4 \text{ cm}^3$$

Verhältnisgleichung:

$173{,}2 \text{ cm}^3 : 100\% = 97{,}4 \text{ cm}^3 : x\%$

$173{,}2 * x = 100 * 97{,}4 \mid :173{,}2$

$$\mathbf{x =} \frac{100 * 97{,}4}{173{,}2} = \mathbf{56{,}2\%}$$