Prüfungsaufgaben Aufgabe 15

Abschlussprüfung 2002

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II **Aufgabengruppe B** **Aufgabe B 3**

B 3.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalenlängen $\overline{AC} = 12\text{ cm}$ und $\overline{BD} = 10\text{ cm}$ ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Grundfläche mit $\overline{MS} = 10\text{ cm}$.

B 3.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann das Maß α des Winkels MAS und die Länge der Strecke [AS] jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\alpha = 59{,}04°$, $\overline{AS} = 11{,}66\text{ cm}$]

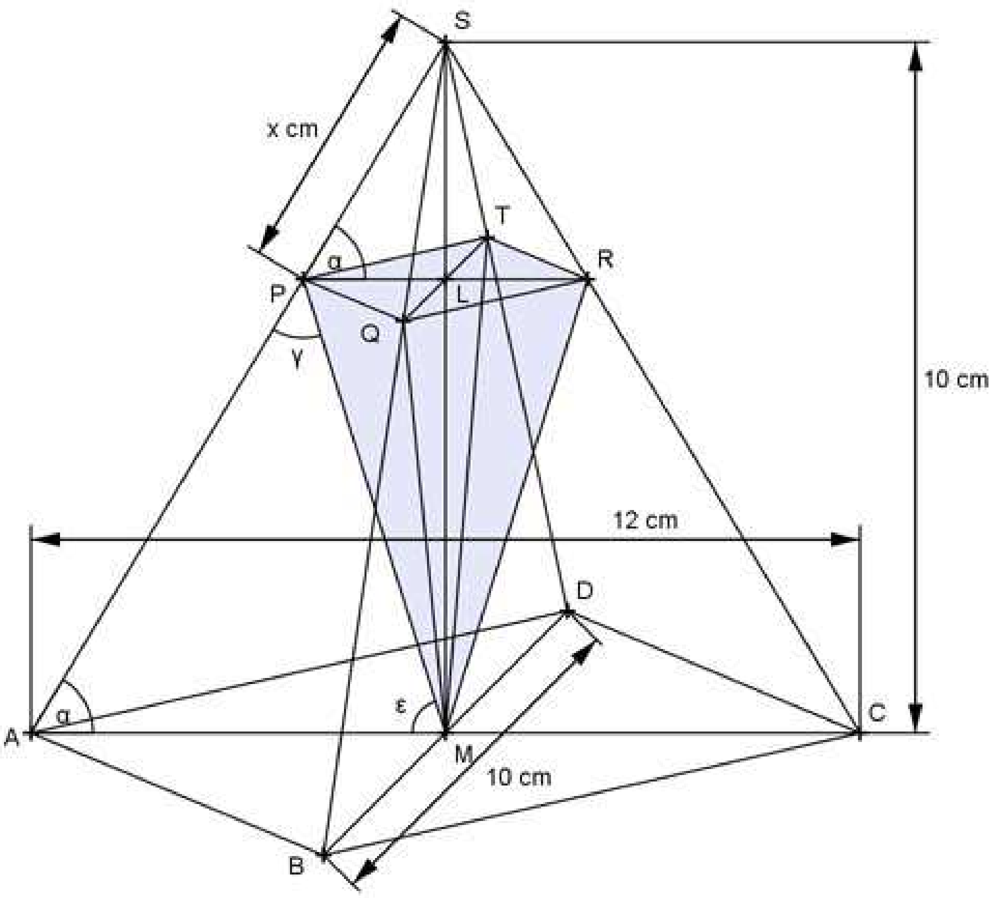
B 3.2 Die Punkte $P_n \in [AS]$, $Q_n \in [BS]$, $R_n \in [CS]$ und $T_n \in [DS]$ sind die Eckpunkte von Rauten $P_nQ_nR_nT_n$. Ihre Diagonalen $[P_nR_n]$ und $[Q_nT_n]$ verlaufen jeweils parallel zu den Diagonalen [AC] und [BD] und schneiden sich in den Punkten L_n. Es gilt: $\overline{P_nS} = x\text{ cm}$.
Die Punkte P_n, Q_n, R_n, T_n und M legen Pyramiden $P_nQ_nR_nT_nM$ fest.
Zeichnen Sie die Pyramide $P_1Q_1R_1T_1M$ für $x = 4$ in die Zeichnung zu 3.1 ein.
Geben Sie an, für welche Werte von x es Pyramiden $P_nQ_nR_nT_nM$ gibt.

B 3.3 Berechnen Sie das Volumen V_1 der Pyramide $P_1Q_1R_1T_1M$ und sodann den prozentualen Anteil von V_1 am Volumen V der Pyramide ABCDS. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

B 3.4 Die Seitenkante $[P_2M]$ der Pyramide $P_2Q_2R_2T_2M$ schließt mit der Grundfläche ABCD der Pyramide ABCDS den Winkel P_2MA mit dem Maß $\varepsilon = 55°$ ein.
Berechnen Sie die Länge der Seitenkante $[P_2M]$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

B 3.5 In der Pyramide $P_0Q_0R_0T_0M$ ist die Länge der Seitenkante $[P_0M]$ minimal.
Berechnen Sie $\overline{P_0M}$ und den dazugehörigen Wert für x. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

3.0 - 3.2



3.1

Im Dreieck ADS gilt:

$$\tan \alpha = \frac{MS}{AC/2} = \frac{10\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 1{,}667 \;\text{-->}\; \mathbf{\alpha = 59{,}04°}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck AMS:

$AS^2 = AM^2 + MS^2 = 6^2\text{ cm}^2 + 10^2\text{ cm}^2 = 136\text{ cm}^2 \;|\sqrt{}$

AS = 11,66 cm

3.2

$0 < x < 11{,}66$ cm

x darf nicht auf S oder A liegen, da sonst keine Pyramide entsteht.

3.3

x = PS = 4 cm

$$V_{ABCDS} = \frac{\frac{AC * BD}{2}}{3} * MS = \frac{AC * BD * MS}{6} = \frac{12\text{ cm} * 10\text{ cm} = 10\text{ cm}}{6}$$

$V_{ABCDS} = 200\text{ cm}^3$

Im Dreieck PLS gilt:

$$\sin \alpha = \frac{LS}{PS} \quad | *PS$$

$LS = PS * \sin \alpha = 4\text{ cm} * \sin 59{,}04° = 3{,}43\text{ cm}$

Höhe h_1 der Pyramide PQRTM:

$ML = h_1 = MS - LS = 10\text{ cm} - 3{,}42\text{ cm} = 6{,}57\text{ cm}$

Strahlensatz:

$$\frac{PR}{AC} = \frac{LS}{MS} \quad | *AC$$

$$PR = \frac{AC * LS}{MS} = \frac{12\text{ cm} * 3{,}43\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 4{,}12\text{ cm}$$

Strahlensatz:

$$\frac{QR}{BC} = \frac{LS}{MS} \quad | *BC$$

$$QR = \frac{BC * LS}{MS} = \frac{10\text{ cm} * 3{,}43\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 3{,}43\text{ cm}$$

$$V_1 = \frac{\frac{PR * QR}{2}}{3} * ML$$

$$V_1 = \frac{PR * QR * ML}{6} = \frac{4{,}12\ cm * 3{,}43\ cm * 6{,}57\ cm}{6}$$

$V_1 = 15{,}47\ cm^3$

Verhältnisgleichung:

$200\ cm^2 : 100\% = 15{,}47\ cm^2 : x\%$

$200 * x = 15{,}47 * 100 \mid :200$

$$\mathbf{x} = \frac{15{,}47 * 100}{200} = \mathbf{7{,}74\%}$$

3.4

$\gamma = 180° - \alpha - \varepsilon = 180° - 59{,}04° - 55 = 65{,}96°$

Sinusatz im Dreieck AMP:

$$\frac{PM_2}{\sin \alpha} = \frac{AC/2}{\sin \gamma} \mid *\sin \varepsilon$$

$$\mathbf{PM_2} = \frac{6\ cm * \sin 59{,}04°}{\sin 65{,}96°} = \mathbf{5{,}63\ cm}$$

3.5

P_0M ist dann minimal, wenn sie senkrecht auf AS steht.

Im rechtwinkligen Dreieck AP_0M gilt:

$$\sin \alpha = \frac{P_0M}{AM} \mid * AM$$

P_0M = $AM * \sin \alpha = 6\ cm * \sin 59{,}04° =$ **$5{,}15\ cm$**

$$\cos \alpha = \frac{AP_0}{AM} \mid *AM$$

$AP_0 = AM * \cos \alpha = 6\ cm * \cos 59{,}04° = 3{,}09\ cm$

x = $AS - AP_0$ = 11,66 cm - 3,09 cm = **8,57 cm**