Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2011
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II

Aufgabe B 1 **Nachtermin**

B 1.0 Die Parabel p besitzt den Scheitel $S(4|7)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y=-0,25x^2+bx+c$ mit $\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und $b, c\in\mathbb{R}$. Die Gerade g hat die Gleichung $y=0,5x-1$ mit $\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

B 1.1 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y=-0,25x^2+2x+3$ hat.
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g für $x\in[-3;10]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4\leq x\leq 11$; $-6\leq y\leq 8$. 4 P

B 1.2 Die Parabel p und die Gerade g schneiden sich in zwei Punkten A und C.
Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Schnittpunkte.
[Teilergebnis: $x_A=-2$; $x_C=8$] 2 P

B 1.3 Punkte $D_n(x|-0,25x^2+2x+3)$ auf der Parabel p sind für $-2<x<8$ zusammen mit den Punkten A und C sowie Punkten B_n die Eckpunkte von Drachenvierecken AB_nCD_n mit der gemeinsamen Symmetrieachse g.
Zeichnen Sie das Drachenviereck AB_1CD_1 für $x=-0,5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
Begründen Sie, dass die Geraden B_nD_n stets die Steigung -2 haben. 2 P

B 1.4 Unter den Drachenvierecken AB_nCD_n besitzt das Drachenviereck AB_0CD_0 den maximalen Flächeninhalt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Drachenvierecks AB_0CD_0.
[Teilergebnis: $A_{\text{Drachenvierecke } AB_nCD_n}(x)=(-2,5x^2+15x+40)$ FE] 4 P

B 1.5 Die Seite $[AB_2]$ des Drachenvierecks AB_2CD_2 verläuft parallel zur x-Achse.
Zeichnen Sie das Drachenviereck AB_2CD_2 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
Bestimmen Sie sodann durch Rechnung das Maß α des Winkels B_2AD_2. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
[Ergebnis: $\alpha=53,13°$] 2 P

B 1.6 Ermitteln Sie rechnerisch die x-Koordinate des Punktes D_2. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. 3 P

1.1, 1.5

Die Scheitelpunktkoordinaten in die Scheitelpunktform
$y = a * (x - x_S)^2 + y_S$ eingesetzt:

$y = - 0,25 * (x - 4)^2 + 7$

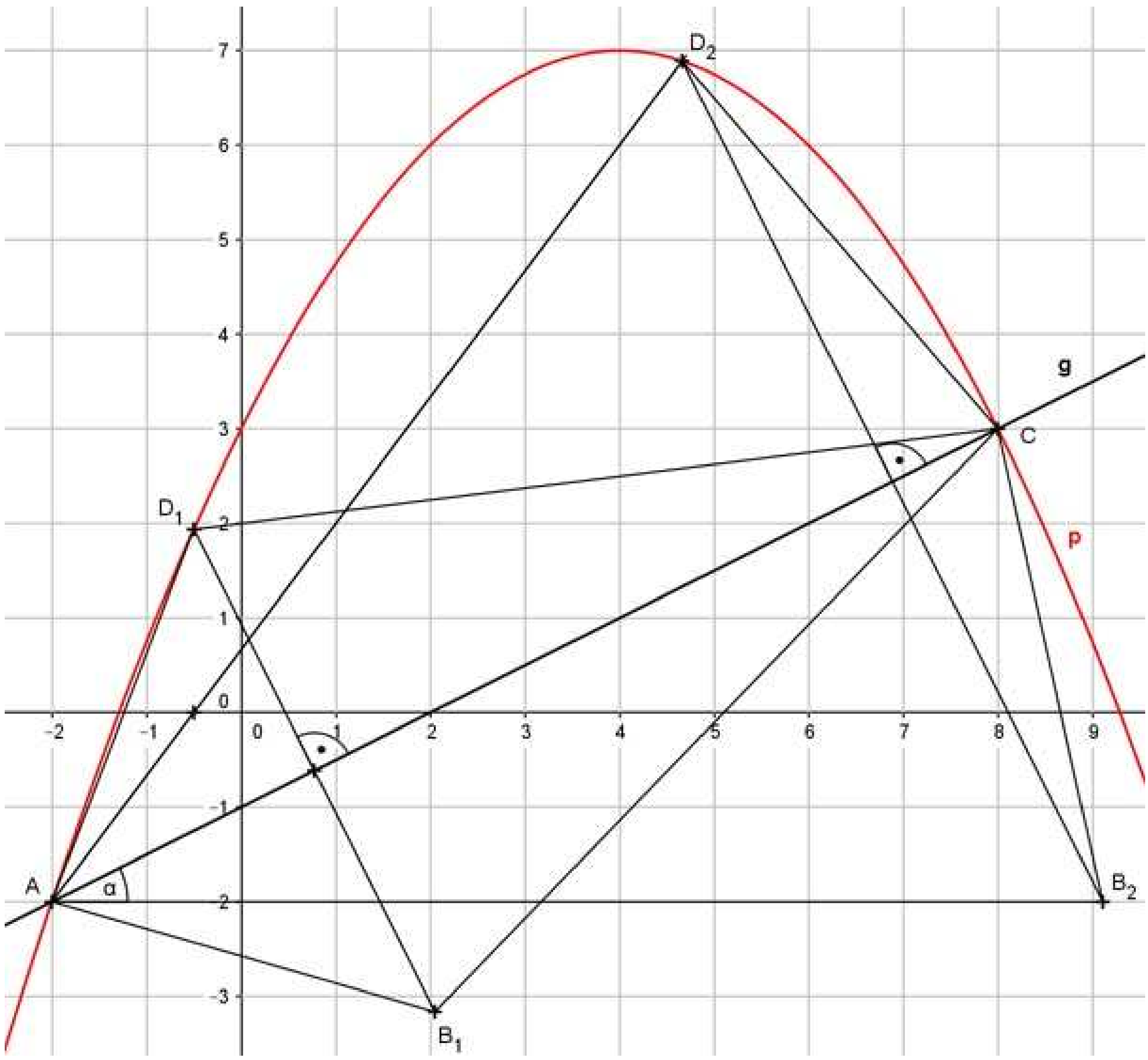
$y = - 0,25 * (x^2 - 8x + 16) + 7$

$y = - 0,25x^2 + 2x - 4 + 7$

$y = - 0,25x^2 + 2x + 3$

Wertetabelle zu p:

x	-3	-1	1	3	5	7	9	10
y	-5,25	0,75	4,75	6,75	6,75	4,75	0,75	-2



1.2

$0{,}5x - 1 = -0{,}25x^2 + 2x + 3 \mid +1$

$0{,}5x = -0{,}25x^2 + 2x + 4 \mid -0{,}5x$

$-0{,}25x^2 + 1{,}5x + 4 = 0 \mid :(-0{,}25)$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

p, q - Formel:

$p = -6,\ q = -16$

$x_{1,2} = \frac{-(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - (-16)}$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{25}$

$x_{1,2} = 3 \pm 5$

$x_1 = 8$

$x_2 = -2$

A hat die Koordinaten $(-2 \mid -0{,}25 * (-2)^2 + 2 * (-2) + 3 = -1 - 4 + 3 = -2)$

A(-2|-2)

C hat die Koordinaten $(8 \mid -0{,}25 * 8^2 + 2 * 8 + 3 = 3)$

C(8|3)

1.3

Die Geraden BD stehen senkrecht auf g. g hat die Steigung m = 0,5.
Die Senkrechte darauf hat die Steigung

$$\mathbf{m_S} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{0{,}5} = \mathbf{-2}$$

1.4

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x \\ -0{,}25x^2+2x+3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ -0{,}25x^2+2x+5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Berechnung von $A_{(x)}$, bestehend aus 2 gleich großen Dreiecken, mit einer Determinante und den Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$:

$$A_{(x)} = 2 * 0,5 * \begin{vmatrix} 10 & x+2 \\ 5 & -0,25x^2+2x+5 \end{vmatrix}$$

$$A_{(x)} = 10 * (-0,25x^2 + 2x + 5) - 5 * (x + 2)$$

$$A_{(x)} = -2,5x^2 + 20x + 50 - 5x - 10$$

$$A_{(x)} = -2,5x^2 + 15x + 40 \quad \text{FE}$$

Berechnung der Scheitelpunktkoordinaten:

$$A_{(x)} = -2,5x^2 + 15x + 40 \mid :(-2,5)$$

$$\frac{A_{(x)}}{-2,5} = x^2 - 6x - 16$$

$$\frac{A_{(x)}}{-2,5} = (x - 3)^2 - 9 - 16$$

$$\frac{A_{(x)}}{-2,5} = (x - 3)^2 - 25 \mid * (-2,5)$$

$$A_{(x)} = -2,5(x - 3)^2 + 62,5$$

Für x = 3 hat **$A_{(x)}$ den maximalen Flächeninhalt von 62,5 FE**.

1.5

g hat die Steigung 0,5 --> tan α = 0,5 --> α = 26,57°

∡ B_2AD_2 = 2 * α = 2 * 26,57° = **53,14°**

1.6

Die Gerade AD der Form y = mx + b hat die Steigung
m = tan 53,14° = 1,33 und geht durch den Punkt A(-2|-2).

Punktkoordinaten und m eingesetzt:

$$-2 = 1,33 * (-2) + b \mid +2,66$$

$$b = 0,66$$

$y = 1{,}33 * x + 0{,}66$

Schnittpunktkoordinaten mit p:

$1{,}33x + 0{,}66 = -0{,}25x^2 + 2x + 3 \mid -1{,}33x$

$0{,}66 = -0{,}25x^2 + 0{,}67x + 3 \mid -0{,}66$

$-0{,}25x^2 + 0{,}67x + 2{,}34 = 0 \mid :-0{,}25$

$x^2 - 2{,}68x - 9{,}36 = 0$

p, q - Formel:

$p = -2{,}68,\ q = -9{,}36$

$x_{1,2} = \frac{-(2{,}68)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2{,}68}{2}\right)^2 - (-9{,}36)}$

$x_{1,2} = 1{,}34 \pm \sqrt{11{,}16}$

$x_{1,2} = 1{,}34 \pm 3{,}34$

$\mathbf{x_1 = 4{,}68}$

$x_2 = -2$ keine Lösung, weil Schnittpunktkoordinate p mit g