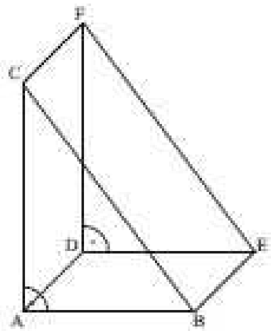
Prüfungsdauer: 150 Minuten

Abschlussprüfung 2012

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

Aufgabe B 2 **Haupttermin**



B 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas ABCDEF, dessen Grundfläche das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten [AB] und [AC] ist.
Es gilt: $\overline{AB} = \overline{AD} = 6\text{ cm}$; $\overline{AC} = 8\text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas ABCDEF, wobei die Kante [AB] auf der Schrägbildachse liegen soll (Lage des Prismas wie in der Skizze zu 2.0 dargestellt).
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [FE] und das Maß des Winkels AFE.
[Ergebnis: $\overline{FE} = 10\text{ cm}$; $\sphericalangle AFE = 50{,}21°$] 4 P

B 2.2 Punkte Q_n liegen auf der Strecke [FE]. Die Winkel FQ_nA haben das Maß φ mit $\varphi \in [64{,}90°; 129{,}79°[$. Die Punkte Q_n sind zusammen mit den Punkten A und F Eckpunkte von Dreiecken AQ_nF.
Zeichnen Sie das Dreieck AQ_1F für $\overline{FQ_1} = 4\text{ cm}$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.
Begründen Sie sodann die Intervallgrenzen für φ. 3 P

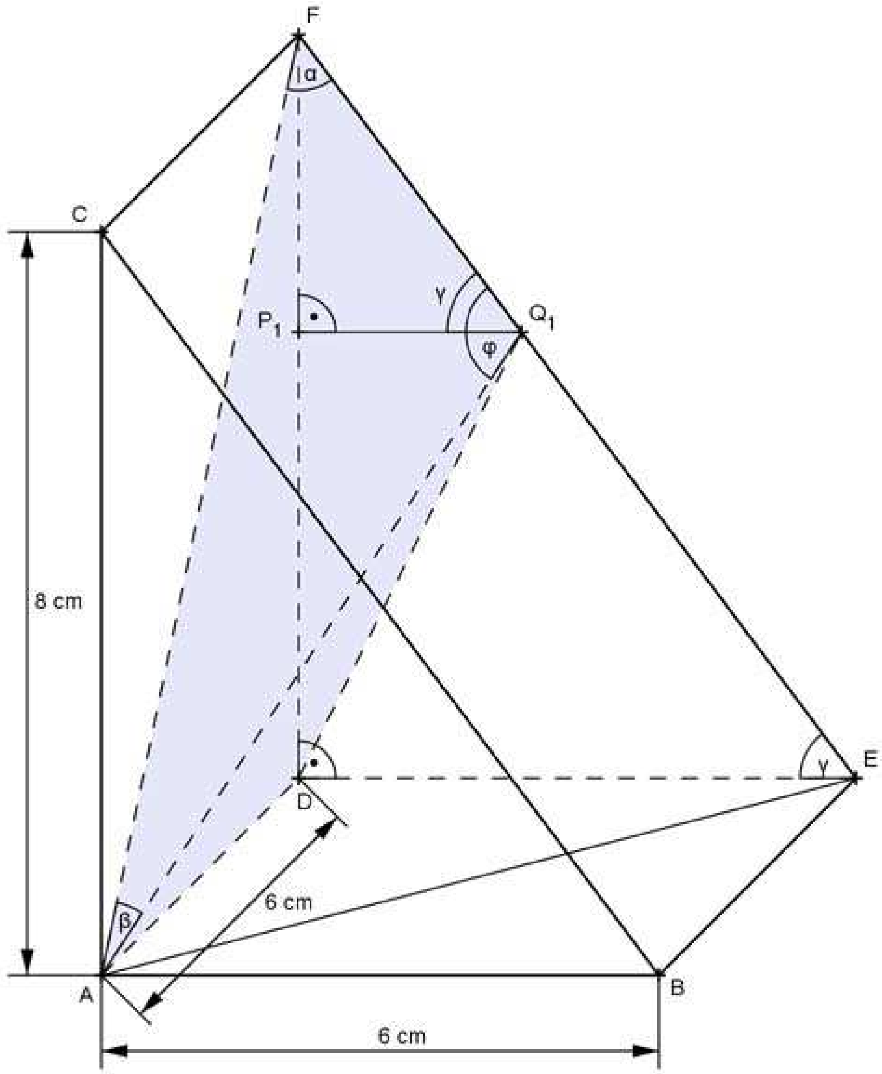
B 2.3 Berechnen Sie die Länge der Strecken $[FQ_n]$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $\overline{FQ_n}(\varphi) = \frac{10 \cdot \sin(50{,}21° + \varphi)}{\sin\varphi}\text{ cm}$] 2 P

B 2.4 Die Punkte Q_n sind die Spitzen von Pyramiden $ADFQ_n$ mit der Grundfläche ADF und den Höhen $[P_nQ_n]$. Die Punkte P_n liegen auf der Strecke [DF].
Zeichnen Sie die Pyramide $ADFQ_1$ und die Höhe $[P_1Q_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein. Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen V der Pyramiden $ADFQ_n$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{48 \cdot \sin(50{,}21° + \varphi)}{\sin\varphi}\text{ cm}^3$] 3 P

B 2.5 Das Volumen der Pyramide $ADFQ_2$ ist um 70 % kleiner als das Volumen des Prismas ABCDEF. Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. 3 P

B 2.6 Die Höhe der Pyramide $ABEDQ_3$ mit der Grundfläche ABED hat das gleiche Maß wie die Höhe der Pyramide $ADFQ_3$. Begründen Sie, dass das Volumen der Pyramide $ABEDQ_3$ 1,5 mal so groß ist wie das Volumen der Pyramide $ADFQ_3$. 2 P

2.0 - 2.2, 2.4



2.1

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

BC = EF

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2\ cm^2 = 100\ cm^2$ |√

BC = 10 cm

Satz von Pythagoras im Dreieck ABE:

BE = AD = 6 cm

$AE^2 = AB^2 + BE^2$

$AE^2 = 6^2 + 6^2\ cm^2 = 72\ cm^2$ |√

AE = 8,49 cm

Satz von Pythagoras im Dreieck ADF:

$DF = AC = 8$ cm

$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 6^2 + 8^2\ cm^2 = 100\ cm^2 \ |\sqrt{\ }$

$AF = 10$ cm

Kosinussatz im Dreieck AEF:

$AE^2 = AF^2 + EF^2 - 2 * AF * EF * \cos \alpha$

$72 = 100 + 100 - 2 * 10 * 10 * \cos \alpha$

$72 = 200 - 200 * \cos \alpha \ | -200$

$-128 = -200 * \cos \alpha \ | :(-200)$

$\cos \alpha = 0,64$ --> **$\alpha = 50,21°$**

2.3

φ_{max} = $180° - \alpha = 180° - 50,21° =$ **$129,71°$**

Sinussatz im Dreieck AEF:

$$\frac{AF}{\sin \varphi} = \frac{AE}{\sin \alpha}$$

Über Kreuz multipliziert:

$AF * \sin \alpha = AE * \sin \varphi_{min} \ | :AE$

$$\sin \varphi_{min} = \frac{AF * \sin \alpha}{AE} = \frac{10\ cm * \sin 50,21°}{8,49\ cm} = 0,9051$$ --> **$\varphi_{min} = 64,84°$**

2.4

In einem beliebigen Dreieck AQF gilt:

$\beta = 180° - (\varphi + \alpha) = 180° - (\varphi + 50,21°)$

$\sin \beta = \sin (180° - (\varphi + 50,21°)) = \sin (\varphi + 50,21°)$

Sinussatz:

$$\frac{FQ}{\sin \beta} = \frac{AF}{\sin \varphi} \ | * \sin \beta$$

$$\mathbf{FQ_{(\varphi)} = \frac{AF \cdot \sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{10\ cm \cdot \sin(\varphi + 50{,}21°)}{\sin\varphi}}$$

2.4

In einem beliebigen Dreieck PDF gilt:

$$\tan\gamma = \frac{DF}{DE} = \frac{8\ cm}{6\ cm} = 1{,}3333 \rightarrow \gamma = 53{,}13°$$

In einem beliebigen Dreieck PQF gilt:

$$\cos\gamma = \frac{PQ}{FQ} \quad | \cdot FQ$$

$$PQ = FQ \cdot \cos\gamma = \frac{10\ cm \cdot \sin(\varphi + 50{,}21°) \cdot \cos 53{,}13°}{\sin\varphi}$$

$$PQ_{(\varphi)} = \frac{6 \cdot \sin(\varphi + 50{,}21°)}{\sin\varphi}$$

$$V_{(\varphi)} = \frac{0{,}5 \cdot AD \cdot DF \cdot PQ_{(\varphi)}}{3}$$

$$V_{(\varphi)} = \frac{0{,}5 \cdot 6\ cm \cdot 8\ cm \cdot 6\ cm \cdot \sin(\varphi + 50{,}21°)}{3 \cdot \sin\varphi}$$

$$\mathbf{V_{(\varphi)} = \frac{48 \cdot \sin(\varphi + 50{,}21°)}{\sin\varphi}\ cm^3}$$

2.5

$V_{ABCDEF} = 0{,}5 \cdot AB \cdot AC \cdot AD = 0{,}5 \cdot 6\ cm \cdot 8\ cm \cdot 6\ cm\ cm^3 = 144\ cm^3$

70% kleiner bedeutet, es sind noch 30% oder als Prozentfaktor 0,3 vorhanden.

$V_{ADFQ2} = 0{,}3 \cdot V_{ABCDEF} = 0{,}3 \cdot 144\ cm^3 = 43{,}2\ cm^3$

$$43{,}2 = \frac{48 \cdot \sin(\varphi + 50{,}21°)}{\sin\varphi}\ cm^3 \quad | \cdot \sin\varphi$$

$$43{,}2 \cdot \sin\varphi = 48 \cdot \sin(\varphi + 50{,}21°) \quad | :48$$

$0{,}9 * \sin \varphi = \sin \varphi * \cos 50{,}21° + \cos \varphi * \sin 50{,}21°$

$0{,}9 * \sin \varphi = \sin \varphi * 0{,}64 + \cos \varphi * 0{,}768 \mid - 0{,}64 * \sin \varphi$

$0{,}26 * \sin \varphi = 0{,}768 * \cos \varphi \mid : \cos \varphi$

$0{,}26 * \tan \varphi = 0{,}768 \mid :0{,}26$

$\tan \varphi = 2{,}9538$ --> $\boldsymbol{\varphi = 71{,}30°}$

2.6

$$V_{ABEDQ} = \frac{AB * AD * h}{3}$$

$$V_{ADFQ} = \frac{0{,}5 * AD * DF * h}{3}$$

$$\frac{V_{ABEDQ}}{V_{ADFQ}} = \frac{\frac{AB * AD * h}{3}}{\frac{0{,}5 * AD * DF * h}{3}} = \frac{AB * AD}{0{,}5 * AD * DF} = \frac{AB}{0{,}5 * DF} = \frac{6 \text{ cm}}{0{,}5 * 8\text{cm}} = \mathbf{1{,}5}$$