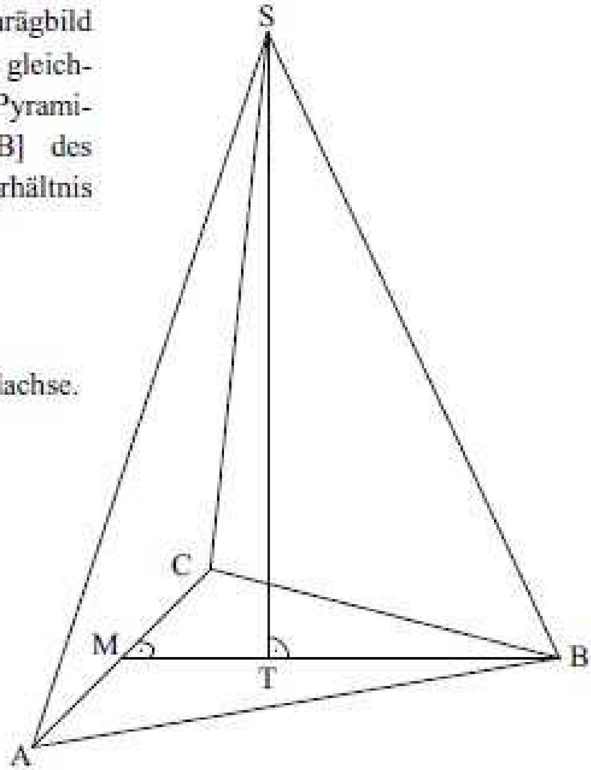
Prüfungsaufgaben Aufgabe 181a

Aufgabe A 2 **Haupttermin**

A 2.0 Die nebenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCS, deren Grundfläche das gleichseitige Dreieck ABC ist. Der Fußpunkt T der Pyramidenhöhe [ST] teilt die Dreieckshöhe [MB] des gleichseitigen Dreiecks ABC im Verhältnis $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$.
Es gilt: $\overline{MB} = 6\text{ cm}$; $\sphericalangle SBM = 65°$.

In der Zeichnung gilt:
$q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$; [MB] liegt auf der Schrägbildachse.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 2.1 Berechnen Sie die Länge der Strecke [ST].
[Ergebnis: $\overline{ST} = 8{,}58\text{ cm}$] 1 P

A 2.2 Punkte P_n liegen auf der Strecke [BS]. Die Winkel BMP_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [0°; 76{,}88°]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten A und C die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken AP_nC mit der Basis [AC].
Zeichnen Sie das Dreieck AP_1C für $\varphi = 20°$ in das Schrägbild zu 2.0 ein. 1 P

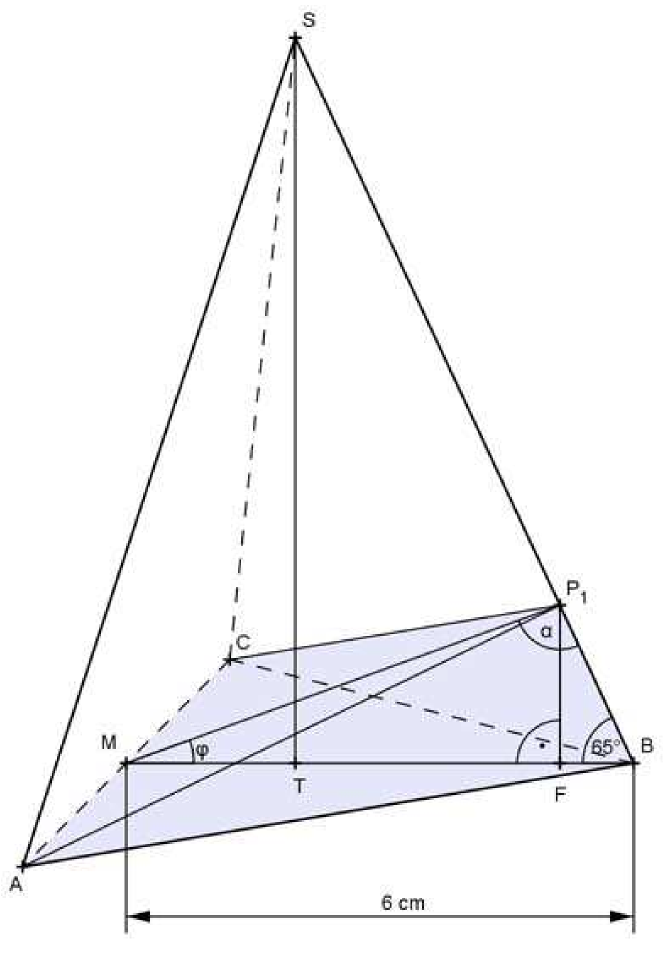
A 2.3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5{,}44}{\sin(\varphi + 65°)}\text{ cm}$.

A 2.4 Unter den Dreiecken AP_nC hat das Dreieck AP_2C den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AP_2C.

2 P

A 2.5 Die Punkte P_n sind für $\varphi \in]0°; 76,88°]$ Spitzen von Pyramiden $ABCP_n$ mit den Höhen $[P_nF_n]$, deren Fußpunkte F_n auf $[MB]$ liegen. Für das Volumen der Pyramide $ABCP_3$ gilt: $V_{ABCP_3} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCS}$. Bestimmen Sie das zugehörige Winkelmaß φ.

2.0, 2.2



2.1

1:2 bedeutet, MB wird in 3 gleiche Teile geteilt -->

1 Teil = MB/3 = 6 cm/3 = 2 cm --> MT = 2 cm. TB = 4 cm.

Im Dreieck TBS gilt:

$$\tan 65° = \frac{ST}{TB} \quad | \cdot TB$$

ST = TB * tan 65° = 4 cm * tan 65° = **8,58 cm**

2.3

In einem beliebigen Dreieck MBP gilt:

$\alpha = 180° - (\varphi + 65°)$

$\sin \alpha = \sin (180° - (\varphi + 65°)) = \sin (\varphi + 65°)$

Sinussatz:

$$\frac{MP}{\sin 65°} = \frac{MB}{\sin \alpha} \quad | \cdot \sin 65°$$

$$\mathbf{MP =} \frac{MB \cdot \sin 65°}{\sin (\varphi + 65°)} = \frac{6\ cm \cdot \sin 65°}{\sin (\varphi + 65°)} = \mathbf{\frac{5{,}44\ cm}{\sin (\varphi + 65°)}}$$

2.4

Der Flächeninhalt wird dann am kleinsten, wenn MP_2 senkrecht auf BS steht --> $\alpha = 90°$. -->

$$MP_2 = \frac{5{,}44\ cm}{\sin 90°} = 5{,}44\ cm$$

Die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck = a/2 * v3

Mit a = AC

MB = AC/2 * v3 | :v3

$$\frac{MB}{\sqrt{3}} = AC/2 \mid * 2$$

$$AC = \frac{MB * 2}{\sqrt{3}} = \frac{6\ cm * 2}{\sqrt{3}} = 6{,}93\ cm$$

$$\mathbf{A_{AP2C} = \frac{AC * MP_2}{2} = \frac{6{,}93\ cm * 5{,}44\ cm}{2} = 18{,}85\ cm^2}$$

2.5

$$V_{ABCS} = \frac{\frac{AC * MB}{2} * TS}{3} = \frac{AC * MB * TS}{6} = \frac{6{,}93\ cm * 6\ cm * 8{,}58\ cm}{6}$$

$V_{ABCS} = 59{,}46\ cm^3$

$V_{ABCP3} = 0{,}5 * V_{ABCS} = 0{,}5 * 59{,}46\ cm^3 = 29{,}73\ cm^3$

Im Dreieck MFP_3 gilt:

$$\sin\varphi = \frac{FP_3}{MP_3} \mid * MP_3$$

$$FP_3 = MP_3 * \sin\varphi = \frac{5{,}44 * \sin\varphi}{\sin(\varphi + 65°)}$$

$$V_{ABCP3} = \frac{\frac{AC * MB}{2} * FP_3}{3} = \frac{AC * MB * FP_3}{6}$$

$$29{,}73\ cm^3 = \frac{6{,}93\ cm * 6\ cm * 5{,}44\ cm * \sin\varphi}{6 * \sin(\varphi + 65°)}$$

$$29{,}73\ cm^3 = \frac{37{,}7\ cm^3 * \sin\varphi}{\sin(\varphi + 65°)} \mid :37{,}7$$

$$0{,}7886 = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + 65°)} \quad | \cdot \sin(\varphi + 65°)$$

$0{,}7886 * \sin(\varphi + 65°) = \sin\varphi$

$0{,}7886 * (\sin\varphi * \cos 65° + \sin 65° * \cos\varphi) = \sin\varphi$

$0{,}7886 * (\sin\varphi * 0{,}4226 + 0{,}9063 * \cos\varphi) = \sin\varphi$

$0{,}33 * \sin\varphi + 0{,}715 * \cos\varphi = \sin\varphi \mid :\cos\varphi$

$0{,}33 * \tan\varphi + 0{,}715 = \tan\varphi \mid :- 0{,}33 * \tan\varphi$

$0{,}715 = 0{,}67 * \tan\varphi \mid :0{,}67$

$\tan\varphi = 1{,}0671$ --> **$\varphi = 46{,}9°$**