Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2013
an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

Aufgabe B 1 **Haupttermin**

B 1.0 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 2 \cdot \log_2(x+5)+3$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

B 1.1 Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 sowie die Gleichung der Asymptote h an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 für $x \in [-4{,}5; 8]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leqq x \leqq 8$; $-4 \leqq y \leqq 11$ 4 P

B 1.2 Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = -2 \cdot \log_2(x+6)+5$ besitzt ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. 3 P

B 1.3 Punkte $A_n(x \mid 2 \cdot \log_2(x+5)+3)$ auf dem Graphen zu f_1 und Punkte $B_n(x \mid -2 \cdot \log_2(x+6)+5)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x. Sie sind für $x > -4$ zusammen mit dem Schnittpunkt $S(-4 \mid 3)$ der Graphen zu f_1 und f_2 und Punkten C_n die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_nSB_nC_n$.
Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1SB_1C_1$ für $x = 0$ und $A_2SB_2C_2$ für $x = 2$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. 2 P

B 1.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalenschnittpunkte M_n der Parallelogramme $A_nSB_nC_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $M_n\left(x \,\middle|\, \log_2 \frac{x+5}{x+6}+4\right)$.
Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M_3 für $C_3(16 \mid y_{C_3})$ mit $y_{C_3} \in \mathbb{R}$. 3 P

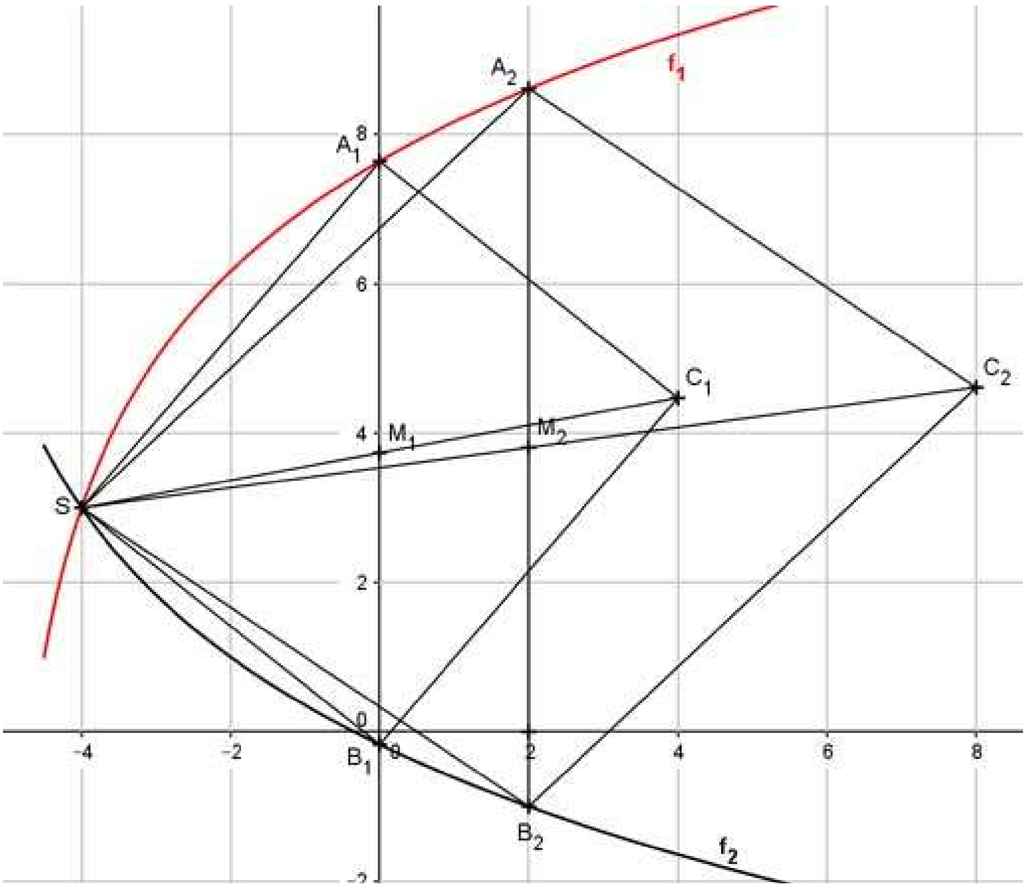
B 1.5 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von x. 2 P

B 1.6 Begründen Sie durch Rechnung, dass es unter den Parallelogrammen $A_nSB_nC_n$ keine Raute gibt. 3 P

1.0 - 1.3

Wertetabelle zu f_1:

x	-4,5	-3	-1	1	3	5	8
y_1	1	5	7	8,2	9	9,6	10,4



1.1

Definitionsmenge:

x > -5, weil der Ausdruck $\log_2(x + 5)$ für alle x ≤ - 5 nicht definiert ist. -->

Asymptote h: **x = -5**

Wertemenge: **- ∞ < y < ∞**

1.2

Achsenspiegelung:

y' = -y --> y = - y'

$$\begin{bmatrix} x \\ -(2* \lg(x+5) +3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ - 2* \lg\ (x+5)-3 \end{bmatrix}$$

Parallelverschiebung:

$x' = x - 1 \mid +1$

$x = x' + 1$

Eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} x'+1 \\ -2*\lg(x'+1+5)-3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'+1 \\ -2*\lg(x'+6)+5 \end{bmatrix}$$

$y' = -2 * \lg(x' + 6) + 5$

1.4

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ 2\log_2(x+5)+3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x \\ -2\log_2(x+6)+5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 2\log_2(x+5)+3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ 2\log_2(x+5)+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\log_2(x+6)-\log_2(x+5)+1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ \log_2(x+5)-\log_2(x+6)+4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ \log_2\frac{(x+5)}{(x+6)}+4 \end{bmatrix}}$$

M_3 liegt auf der Hälfte der Strecke SC_3.

M_3 hat die x-Koordinate: $\dfrac{x_S + x_{C3}}{2} = \dfrac{-4 + 16}{2} = 6$

$M_3\left(6 \,\middle|\, \log_2 \dfrac{(6 + 5)}{(6 + 6)} + 4 = 3{,}87\right)$

$M_3(6|3{,}87)$

1.5

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OS} + 2 * \overrightarrow{SM}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 * \left[\begin{pmatrix} x \\ \log_2\frac{(x+5)}{(x+6)}+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathbf{\overrightarrow{OC}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 * \begin{bmatrix} x+4 \\ \log_2\frac{(x+5)}{(x+6)}+1 \end{bmatrix} = \mathbf{\begin{bmatrix} 2x+4 \\ 2*\log_2\frac{(x+5)}{(x+6)}+5 \end{bmatrix}}$$

1.6

Bei einer Raute müssten sich die Diagonalen SC und AB halbieren und senkrecht aufeinander stehen.

--> y_M müsste gleich y_S sein.

$$\log_2\left(\frac{x + 5}{x + 6}\right) + 4 = 3 \quad | -4$$

$$\log_2\left(\frac{x + 5}{x + 6}\right) = -1$$

Entlogarithmiert:

$$\frac{x + 5}{x + 6} = 2^{-1} \quad | \cdot (x + 6)$$

$x + 5 = 0{,}5 * (x + 6)$

$x + 5 = 0{,}5x + 3 \quad | -0{,}5x$

$0{,}5x + 5 = 3 \quad | -5$

$0{,}5x = - 2 \quad | :0{,}5$

$x = - 4$

Da $x = - 4$ die x-Koordinate des Schnittpunktes von f_1 mit f_2 ist, entsteht weder eine Raute noch ein Parallelogramm, da M mit S zusammenfallen würde.