Prüfungsaufgaben Aufgabe 188

Prüfungsdauer: 150 Minuten

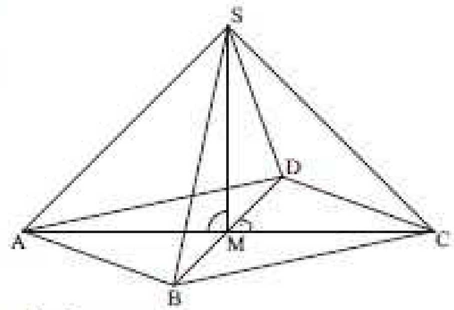
Abschlussprüfung 2013
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II

Aufgabe B 1 **Haupttermin**

B 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, deren Grundfläche die Raute ABCD ist. Die Spitze S der Pyramide ABCDS liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Raute ABCD.
Es gilt: $\overline{AB} = 7{,}5\text{ cm}$; $\overline{BD} = 9\text{ cm}$; $\overline{MS} = 6\text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Strecke [AC] gilt: $\overline{AC} = 12\text{ cm}$.
Zeichnen Sie sodann das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke [AC] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$. 3 P

B 1.2 Berechnen Sie das Maß des Winkels SBA sowie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABS.
[Teilergebnis: $\sphericalangle SBA = 68{,}94°$] 4 P

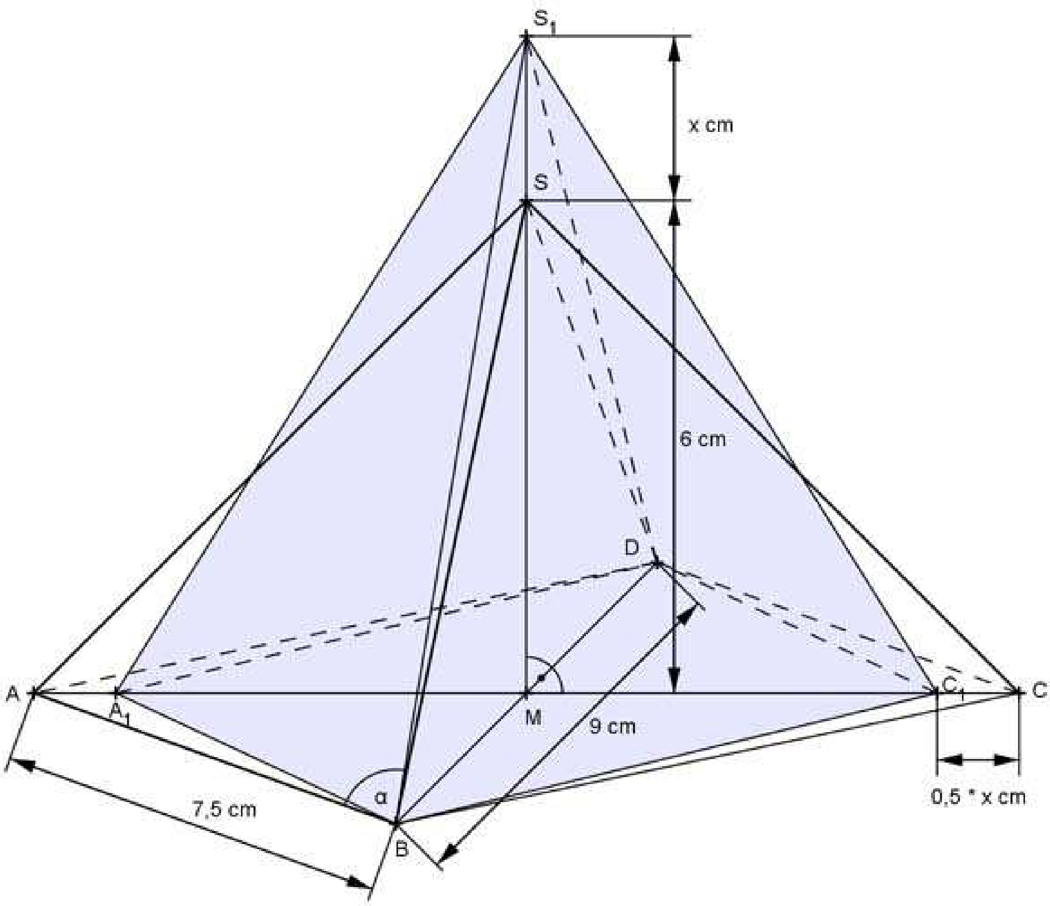
B 1.3 Verlängert man die Höhe [MS] über S hinaus um x cm, so erhält man Punkte S_n. Verkürzt man gleichzeitig die Diagonale [AC] der Grundfläche von den Punkten A und C aus um jeweils $0{,}5x$ cm, so erhält man Punkte A_n und C_n mit $x \in \left]0;12\right[$ und $x \in \mathbb{R}$.
Die Punkte A_n, B, C_n und D sind die Eckpunkte der Grundflächen von Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ mit den Spitzen S_n.
Zeichnen Sie die Pyramide $A_1BC_1DS_1$ für $x = 2$ in das Schrägbild zu 1.1 ein. 1 P

B 1.4 Zeigen Sie, dass sich das Volumen V der Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ in Abhängigkeit von x wie folgt darstellen lässt: $V(x) = \left(-1{,}5x^2 + 9x + 108\right)\text{cm}^3$.
Unter den Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ besitzt die Pyramide $A_2BC_2DS_2$ das maximale Volumen. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x und das Volumen V_{max} der Pyramide $A_2BC_2DS_2$. 3 P

B 1.5 Das Volumen der Pyramide $A_3BC_3DS_3$ beträgt 70 % des Volumens der Pyramide ABCDS. Ermitteln Sie durch Rechnung den zugehörigen Wert von x. 3 P

B 1.6 Der Winkel $C_4A_4S_4$ der Pyramide $A_4BC_4DS_4$ hat das Maß 60°. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x. 3 P

1.0, 1.1, 1.3



Satz von Pythagoras im Dreieck ABM:

BM = BD/2 = 9 cm/2 = 4,5 cm

$AB^2 = BM^2 + AM^2$ |$-BM^2$

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2 = 36$ |$\sqrt{}$

AM = 6 cm

AC = 2 * AM = 2 * 6 cm = **12 cm**

1.2

Satz von Pythagoras im Dreieck BMS:

$BS^2 = BM^2 + MS^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 56{,}25$ |$\sqrt{}$

BS = 7,5 cm

Satz von Pythagoras im Dreieck AMS:

$AS^2 = AM^2 + MS^2 = 6^2 + 6^2 = 72$ |√

AS = 8,49 cm

Kosinussatz im Dreieck ABS:

$AS^2 = AB^2 + BS^2 - 2 * AB * BS * \cos \alpha$

$8{,}49^2 = 7{,}5^2 + 7{,}5^2 - 2 * 7{,}5 * 7{,}5 * \cos \alpha$

$72{,}08 = 112{,}5 - 112{,}5 * \cos \alpha$ | -112,5

$- 40{,}42 = - 112{,}5 * \cos \alpha$ | :(-112,5)

$\cos \alpha = 0{,}3593$ --> **$\alpha = 68{,}94°$**

$A = 0{,}5 * AB * BS * \sin \alpha$

A = 0,5 * 7,5 cm * 7,5 cm * sin 68,94° = **26,25 cm²**

1.4

$$V = \frac{0{,}5 * (AC - 2 * 0{,}5x) * BC * (MS + x)}{3}$$

$$V = \frac{0{,}5 * (12 - x) * 9 * (6 + x)}{3}$$

$$V = \frac{4{,}5 * (72 - 6x + 24x - x^2)}{3}$$

$V_{(x)} = - 1{,}5x^2 + 9x + 108$ cm³

Berechnung der Scheitelpunktkoordinaten:

$V = - 1{,}5x^2 + 9x + 108$ | :(-1,5)

$$\frac{V}{- 1{,}5} = x^2 - 6x - 72$$

$$\frac{V}{- 1{,}5} = (x - 3)^2 -9 - 72$$

$$\frac{V}{-1,5} = (x - 3)^2 - 81 \quad | \; *(-1,5)$$

$$V = -1,5(x - 3)^2 + 121,5$$

Für x = 3 cm ist V maximal und beträgt 121,5 cm³.

1.5

$$V_{ABCDS} = \frac{0,5 * AC * BD * MS}{3} = \frac{0,5 * 12 * 9 * 6}{3} \text{ cm}^3 = 108 \text{ cm}^3$$

70% von 108 cm³ = 0,7 * 108 cm³ = 75,6 cm³

$$75,6 = -1,5x^2 + 9x + 108 \quad | \; -75,6$$

$$-1,5x^2 + 9x + 32,4 = 0 \quad | \; :(-1,5)$$

$$x^2 - 6x - 21,6 = 0$$

p, q - Formel:

$p = -6$, $q = -21,6$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - (-21,6)}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{30,6}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 5,53$$

$x_1 = 8,53$ cm

($x_2 = -2,53$ negative Länge)

1.6

Im Dreieck A_4MS_4 gilt:

$$\tan 60° = \frac{MS_4}{A_4M} = \frac{6 + x}{6 - 0,5x} \quad | \; * (6 - 0,5x)$$

$$1,73 * (6 - 0,5x) = 6 + x$$

$$10,38 - 0,865x = 6 + x \quad | \; +0,865x$$

$10{,}38 = 6 + 1{,}865x \mid -6$

$4{,}38 = 1{,}865x \mid :1{,}865$

$x = 2{,}35$ cm