Abschlussprüfung 2014

an den Realschulen in Bayern

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Mathematik I

Aufgabe B 1 — Haupttermin

B 1.0 Der Punkt $A(-1|-2)$ legt zusammen mit den Pfeilen $\overrightarrow{AB_n}(\varphi)=\begin{pmatrix}2\cdot\cos\varphi+3\\5\cdot\sin^2\varphi+1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD_n}(\varphi)=\begin{pmatrix}3\cdot\cos\varphi-3\\4\end{pmatrix}$ für $\varphi\in[0°;180°]$ Parallelogramme $AB_nC_nD_n$ fest.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AD_1}$ für $\varphi=60°$ sowie $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AD_2}$ für $\varphi=130°$. Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme $AB_1C_1D_1$ und $AB_2C_2D_2$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8\leqq x\leqq 6$; $-3\leqq y\leqq 9$. 4 P

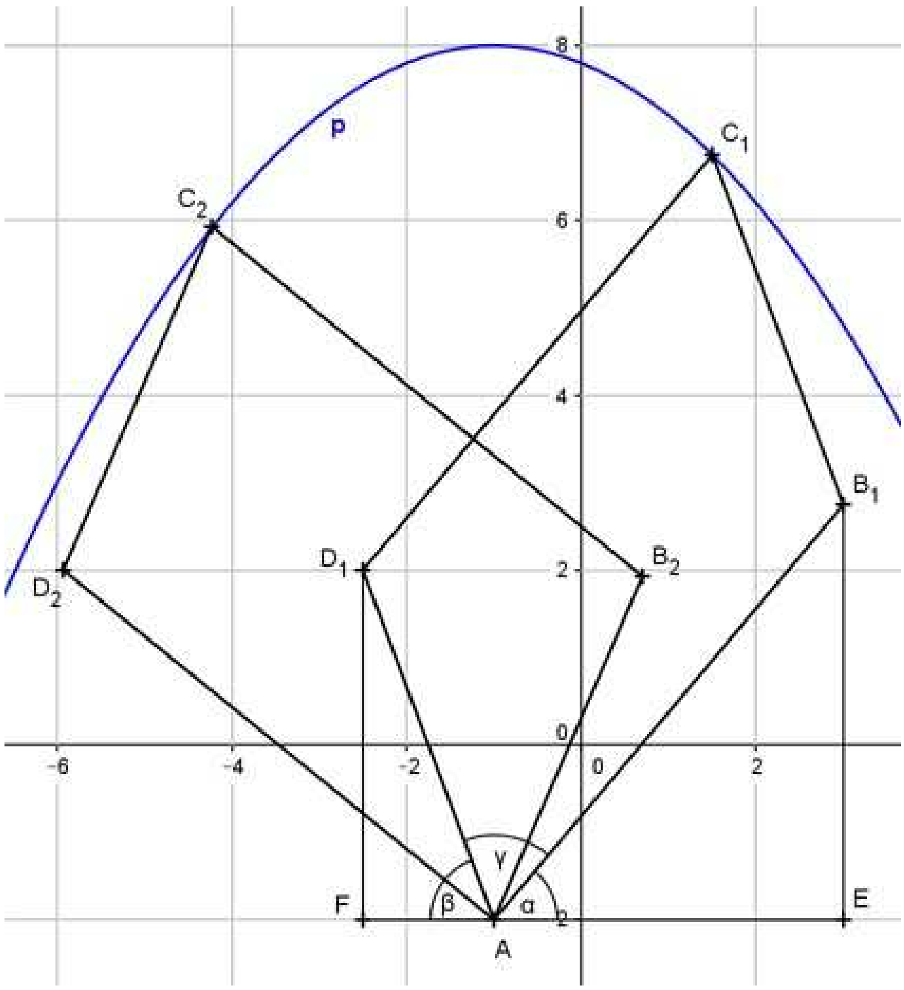
B 1.2 Berechnen Sie das Maß des Winkels B_1AD_1. 2 P

B 1.3 Unter den Parallelogrammen $AB_nC_nD_n$ gibt es das Rechteck $AB_3C_3D_3$.
Ermitteln Sie rechnerisch das zugehörige Winkelmaß φ. 4 P

B 1.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Trägergraph p der Punkte C_n die Gleichung $y=-0{,}2\cdot(x+1)^2+8$ $(\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ hat.
Zeichnen Sie sodann den Trägergraphen p in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.
$\left[\text{Teilergebnis: } C_n\left(5\cdot\cos\varphi-1\,\middle|\,5\cdot\sin^2\varphi+3\right)\right]$ 4 P

B 1.5 Beim Parallelogramm $AB_4C_4D_4$ liegt der Punkt D_4 auf dem Trägergraphen p der Punkte C_n.
Bestimmen Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß φ. 3 P

1.0, 1.1, 1.4



1.1

	$\overrightarrow{AB_1}$	$\overrightarrow{AB_2}$	$\overrightarrow{AD_1}$	$\overrightarrow{AD_2}$
φ	60°	130°	60°	130°
x	**4**	**1,71**	**-1,5**	**-4,93**
y	**4,75**	**3,93**	**4**	**4**

1.2

Im Dreieck AD_1F gilt:

$$\tan\beta = \frac{yD_1}{|xD_1|} = \frac{4}{1,5} = 2,6667 \longrightarrow \beta = 69,44°$$

Im Dreieck AEB_1 gilt:

$$\tan\alpha = \frac{yB_1}{xB_1} = \frac{4,75}{4} = 1,1875 \longrightarrow \alpha = 49,84°$$

$\boldsymbol{\gamma =}$ $180° - \alpha - \beta = 180° - 49,84° - 69,4° =$ **60,72°**

1.3

Wenn aus dem Parallelogramm ein Rechteck wird, dann stehen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ senkrecht aufeinander, und es gilt:

$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = 0$

$$\begin{bmatrix} 2*\cos\varphi+3 \\ 5*\sin^2\varphi+1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3*\cos\varphi-3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

$(2\cos\varphi + 3) * (3\cos\varphi - 3) + 20\sin^2\varphi + 4$

$6\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 9 + 20\sin^2\beta + 4 = 0$

$6\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 5 + 20 * (1 - \cos^2\varphi) = 0$

$-14\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 15 = 0$

A,B,C - Formel:

A = -14, B = 3, C = 15

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4*(-14)*15}}{2*(-14)} = \frac{-3 \pm \sqrt{849}}{-28}$$

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{-3 \pm 29{,}14}{-28}$$

$\cos\varphi_1 = -0{,}9336$ --> $\boldsymbol{\varphi_1 = 159°}$

$\cos\varphi_2 = 1{,}15$ --> keine Lösung > 1

1.4

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi+3 \\ 5\sin^2\varphi+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\cos\varphi-3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cos\varphi \\ 5\sin^2\varphi+5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\cos\varphi \\ 5\sin^2\varphi+5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5\cos\varphi-1 \\ 5\sin^2\varphi+3 \end{bmatrix}$$

Die x-Koordinate von C entspricht der x'-Koordinate von p.

$x' = 5 * \cos\varphi - 1 \mid +1$

$x' + 1 = 5 * \cos\varphi \mid :5$

$$\cos\varphi = \frac{x' + 1}{5}$$

$$y' = 5 * \sin^2\varphi + 3 = 5 * (1 - \cos^2\varphi) + 3$$

$$y' = 5 * \left(1 - \left(\frac{x' + 1}{5}\right)^2\right) + 3$$

$$y' = 5 - 5 * \frac{(x' + 1)^2}{25} + 3$$

$y' = - 0{,}2 * (x' + 1)^2 + 8$

1.5

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\cos\varphi - 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos\varphi - 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Alle Punkte D liegen in y-Richtung 4 LE von A entfernt. --> Jeder Punkt D hat die y-Koordinate 2.
Wenn D auf p liegt, dann muss die x-Koordinate von D gleich der x-Koordinate von p sein.

$$2 = - 0{,}2 * (3\cos\varphi - 4 + 1)^2 + 8 \mid -2$$

$$-0{,}2 * (9\cos^2\varphi - 18\cos\varphi + 9) + 6 = 0$$

$$- 1{,}8\cos^2\varphi + 3{,}6\cos\varphi - 1{,}8 + 6 = 0$$

$$- 1{,}8\cos^2\varphi + 3{,}6\cos\varphi + 4{,}2 = 0$$

A,B,C - Formel:

$A = - 1{,}8$, $B = 3{,}6$, $C = 4{,}2$

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{- 3{,}6 \pm \sqrt{3{,}6^2-(4*4{,}2*(-1{,}8))}}{2 * (-1{,}8)} = \frac{- 3{,}6 \pm \sqrt{43{,}2}}{- 3{,}6}$$

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{- 3{,}6 \pm 6{,}57}{- 3{,}6}$$

$\cos\varphi_1 = - 0{,}825$ --> **$\varphi_1 = 145{,}59°$**

$\cos\varphi_2 = 2{,}825$ --> keine Lösung > 1