Prüfungsaufgaben Aufgabe 198

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2014

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

Aufgabe B 2 **Nachtermin**

B 2.0 Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats ABCD liegt.
Es gilt: $\overline{AC} = 8\text{ cm}$; $\overline{MS} = 10\text{ cm}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Diagonale [AC] auf der Schrägbildachse und A links von C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie die Länge der Strecke [SC] und das Maß des Winkels ASC.
[Ergebnisse: $\overline{SC} = 10{,}77\text{ cm}$; $\sphericalangle ASC = 43{,}60°$] 4 P

B 2.2 Parallele Ebenen zur Grundfläche der Pyramide ABCDS schneiden die Kanten der Pyramide ABCDS in den Punkten $A_n \in [AS]$, $B_n \in [BS]$, $C_n \in [CS]$ und $D_n \in [DS]$. Der Punkt $Z \in [MS]$ mit $\overline{SZ} = 3\text{ cm}$ ist die Spitze von Pyramiden $A_nB_nC_nD_nZ$, deren Grundflächen die Quadrate $A_nB_nC_nD_n$ sind. Die Winkel A_nZC_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [59{,}49°; 180°[$. Punkte $M_n \in [MZ]$ sind die Mittelpunkte der Strecken $[A_nC_n]$.
Zeichnen Sie die Pyramide $A_1B_1C_1D_1Z$ und den Punkt M_1 für $\varphi = 70°$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein. 1 P

B 2.3 Bestätigen Sie durch Rechnung die untere Intervallgrenze für φ. 1 P

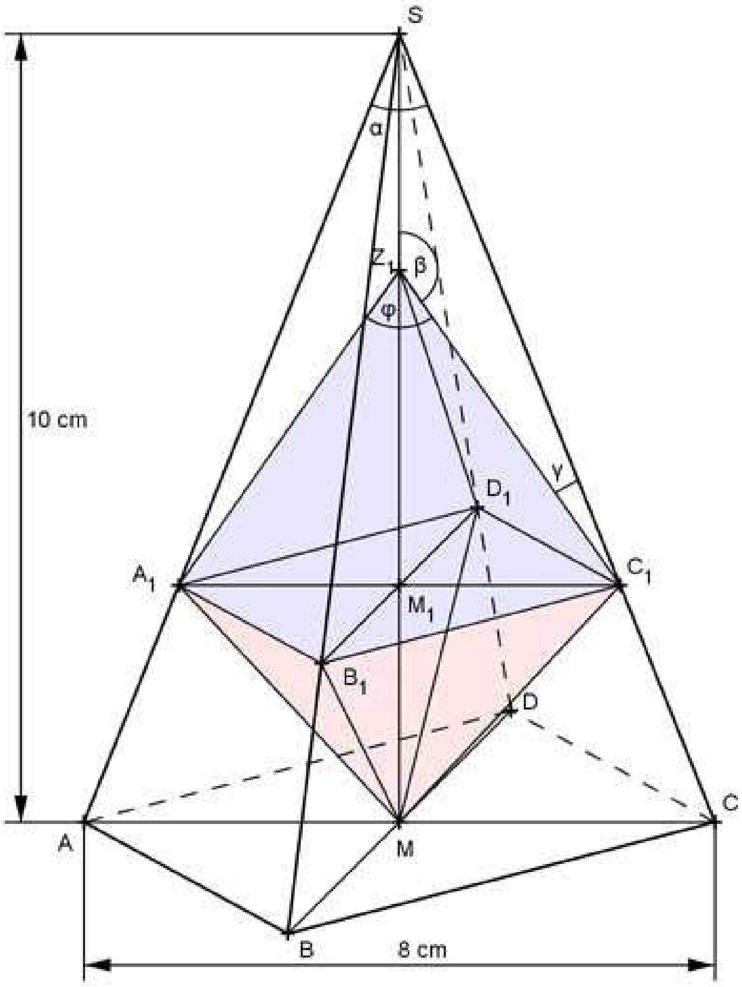
B 2.4 Bestimmen Sie die Länge der Strecken $[SC_n]$ in Abhängigkeit von φ.

$$\left[\text{Ergebnis: } \overline{SC_n}(\varphi) = \frac{3 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - 21{,}80°\right)}\text{ cm}\right]$$ 3 P

B 2.5 Zeichnen Sie zusätzlich die Pyramide $A_1B_1C_1D_1M$ mit der Grundfläche $A_1B_1C_1D_1$ und der Spitze M in die Zeichnung zu B 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann, um wie viel Prozent das Volumen der Pyramide $A_1B_1C_1D_1Z$ mit der Grundfläche $A_1B_1C_1D_1$ und der Spitze Z größer ist als das Volumen der Pyramide $A_1B_1C_1D_1M$ mit der Grundfläche $A_1B_1C_1D_1$ und der Spitze M.
[Teilergebnis: $\overline{M_1Z} = 4{,}00\text{ cm}$] 4 P

B 2.6 Die Pyramiden $A_2B_2C_2D_2M$ und $A_2B_2C_2D_2Z$ mit den Spitzen M und Z und der gemeinsamen Grundfläche $A_2B_2C_2D_2$ sind volumengleich.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. 4 P

2.0, 2.1, 2.2, 2.5



2.1

Satz von Pythagoras im Dreieck MSC:

MC = AC/2 = 8 cm/2 = 4 cm

SC² = MC² + MS² = 4² + 10² = 116 cm² |√

SC = 10,77 cm

Im Dreieck MSC gilt:

$$\tan \alpha/2 = \frac{MC}{MS} = \frac{4\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 0{,}4 \text{ --> } \alpha/2 = 21{,}8° \text{ --> } \boldsymbol{\alpha = 43{,}6°}$$

2.3

φ wird minimal, wenn C_1 mit C zusammenfällt.

Im Dreieck MCZ gilt:

$MZ = MS - SZ = 10\text{ cm} - 3\text{ cm} = 7\text{ cm}$

$$\tan \varphi/2 = \frac{MC}{MZ} = \frac{4\text{ cm}}{7\text{ cm}} = 0{,}5714 \rightarrow \varphi/2 = 29{,}74° \rightarrow \boldsymbol{\varphi = 59{,}48°}$$

2.4

In einem beliebigen Dreieck SZC gilt:

$\beta = 180° - \varphi/2$

$\sin \beta = \sin(180° - \varphi/2) = \sin \varphi/2$

$\gamma = 180° - \alpha/2 - \beta = 180° - \alpha/2 - (180° - \varphi/2) = \varphi/2 - \alpha/2 = \varphi/2 - 21{,}8°$

Sinussatz:

$$\frac{CS}{\sin \beta} = \frac{ZS}{\sin \gamma} \quad | \cdot \sin \beta$$

$$\boldsymbol{CS_{(\varphi)}} = \frac{ZS \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \boldsymbol{\frac{3\text{ cm} \cdot \sin \varphi/2}{\sin(\varphi/2 - 21{,}8°)}}$$

2.5

Im Dreieck SM_1C_1 gilt:

$$\cos \alpha/2 = \frac{M_1S}{C_1S} \quad | \cdot C_1S$$

$$M_1S = C_1S \cdot \cos \alpha/2 = \frac{3\text{ cm} \cdot \cos 21{,}8° \cdot \sin \varphi/2}{\sin(\varphi/2 - 21{,}8°)} = \frac{2{,}79\text{ cm} \cdot \sin 35°}{\sin(35° - 21{,}8°)}$$

$M_1S = 7\text{ cm}$

$M_1Z = M_1S - ZS = 7\text{ cm} - 3\text{ cm} = 4\text{ cm}$

Beide Pyramiden haben die gleiche Grundfläche --> ihr Volumen ändert sich nur mit der Höhe --> Volumina und Höhen stehen im gleichen Verhältnis.
$MM_1 = MS - M_1S = 10\text{ cm} - 7\text{ cm} = 3\text{ cm}$

$$\frac{V_{A1B1C1D1Z}}{V_{A1B1C1D1M}} = \frac{M_1Z}{MM_1} = \frac{4\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 1{,}33 \text{ -->}$$

$V_{A1B1C1D1Z}$ ist um 33% größer als $V_{A1B1C1D1M}$

2.6

Die beiden Pyramiden haben dann das gleiche Volumen, bei gleicher Grundfläche, wenn ihre Höhen gleich sind.

Die Höhe der beiden Pyramiden beträgt $M_2Z/2 = 7\text{ cm}/2 = 3{,}5\text{ cm}$.

$3{,}5 = M_2Z = M_2S - 3\text{ cm}$

$$3{,}5 = \frac{2{,}79\text{ cm} * \sin\varphi/2}{\sin(\varphi/2 - 21{,}8°)} - 3 \mid +3$$

$$6{,}5 = \frac{2{,}79\text{ cm} * \sin\varphi/2}{\sin(\varphi/2 - 21{,}8°)} \mid + \sin(\varphi/2 - 21{,}8)$$

$6{,}5 * \sin(\varphi/2 - 21{,}8°) = 2{,}79 * \sin\varphi/2 \mid :2{,}79$

$2{,}33 * (\sin\varphi/2 * \cos 21{,}8° - \cos\varphi/2 * \sin 21{,}8°) = \sin\varphi/2$

$2{,}33 * (\sin\varphi/2 * 0{,}9285 - \cos\varphi/2 * 0{,}3714) = \sin\varphi/2$

$2{,}33 * \sin\varphi/2 - 0{,}865 * \cos\varphi/2 = \sin\varphi/2 \mid :\cos\varphi/2$

$2{,}16 * \tan\varphi/2 - 0{,}865 = \tan\varphi/2 \mid - \tan\varphi/2$

$1{,}16 * \tan\varphi/2 - 0{,}865 = 0 \mid +0{,}865$

$1{,}16 * \tan\varphi/2 = 0{,}865 \mid :1{,}16$

$\tan\varphi/2 = 0{,}7457$ --> $\varphi/2 = 36{,}71°$ --> **$\varphi = 73{,}42°$**