Prüfungsdauer: 150 Minuten

Abschlussprüfung 2014

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II

Aufgabe B 1 — Nachtermin

B 1.0 Die Punkte $P(-5\,|\,-3{,}4)$ und $Q(2\,|\,-0{,}6)$ liegen auf der Parabel p mit einer Gleichung der Form $y=-0{,}4x^2+bx+c$ mit $\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und $b,c\in\mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y=0{,}2x+6$ mit $\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

B 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y=-0{,}4x^2-0{,}8x+2{,}6$ hat.
Zeichnen Sie sodann die Parabel p für $x\in[-5;3]$ sowie die Gerade g in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6\leqq x\leqq 6$; $-4\leqq y\leqq 8$ — 4 P

B 1.2 Punkte $B_n(x\,|\,-0{,}4x^2-0{,}8x+2{,}6)$ auf der Parabel p und Punkte $D_n(x\,|\,0{,}2x+6)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x mit $x\in\,]-5;3[$ und sind zusammen mit den Punkten $A(-5\,|\,5)\in g$ und $C(3\,|\,2)$ die Eckpunkte von Vierecken AB_nCD_n.
Zeichnen Sie das Viereck AB_1CD_1 für $x=-2$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. — 1 P

B 1.3 Bestätigen Sie rechnerisch, dass für den Flächeninhalt A der Vierecke AB_nCD_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n gilt:
$A(x)=(1{,}6x^2+4x+13{,}6)$ FE. — 4 P

B 1.4 Unter den Vierecken AB_nCD_n besitzt das Viereck AB_0CD_0 den minimalen Flächeninhalt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks AB_0CD_0 und den zugehörigen Wert für x. — 2 P

B 1.5 Die Vierecke AB_2CD_2 und AB_3CD_3 sind Trapeze mit $AD_2\parallel B_2C$ beziehungsweise $AD_3\parallel B_3C$.
Zeichnen Sie die Trapeze AB_2CD_2 und AB_3CD_3 in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. — 2 P

B 1.6 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_2 und B_3. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
[Teilergebnis: B_2C: $y=0{,}2x+1{,}4$] — 4 P

1.0, 1.1, 1.2, 1.5

Punktkoordinaten von P und Q in die Gleichung der Form
$y = -0{,}4x^2 + bx + c$ eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
-3{,}4 &= -0{,}4 \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c \quad | \cdot(-1) \\
-0{,}6 &= -0{,}4 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3{,}4 &= 10 + 5b - c \qquad (1) \\
-0{,}6 &= -1{,}6 + 2b + c
\end{aligned}
$$

$2{,}8 = 8{,}4 + 7b \quad | -8{,}4$

$-5{,}6 = 7b \quad | :7$

$b = -0{,}8$

In (1) eingesetzt:

$3{,}4 = 10 + 5 \cdot (-0{,}8) - c \quad | -6$

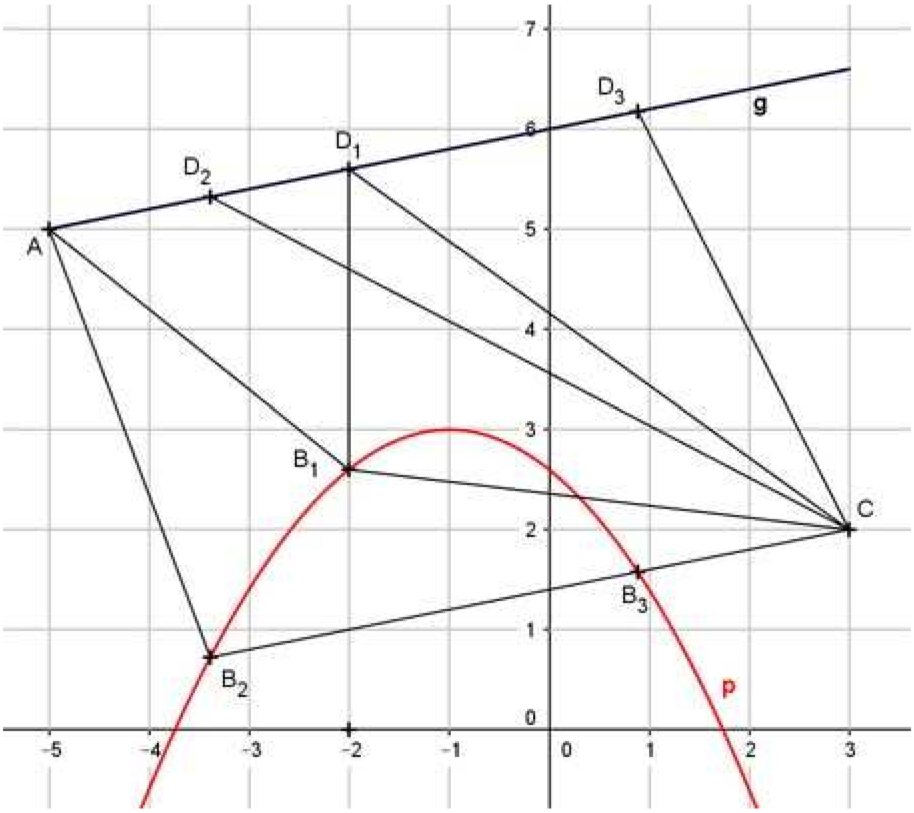
$-c = -2{,}6 \quad | \cdot(-1)$

$c = 2{,}6$

$y = -0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}6$

Wertetabelle für p:

x	-5	-3	-1	1	3
y	-3,4	1,4	3	1,4	-3,4



1.3

Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD setzt sich zusammen aus dem der Dreiecke ABD und BCD.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-5 \\ 0{,}4x^2 + 0{,}8x + 2{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} x \\ 0{,}2x + 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}4x^2 + x + 3{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-x \\ 0{,}4x^2 + 0{,}8x - 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Berechnung von $A_{(x)}$ mit Determinanten und den Vektoren $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$A_{(x)} = 0{,}5 * \begin{bmatrix} 0 & -x-5 \\ 0{,}4x^2 + x + 3{,}4 & -0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3-x & 0 \\ 0{,}4x^2 + 0{,}8x - 0{,}6 & 0{,}4x^2 + x + 3{,}4 \end{bmatrix}$$

$$A_{(x)} = 0{,}5 * [(x + 5) * (0{,}4x^2 + x + 3{,}4) + (3 - x) * (0{,}4x^2 + x + 3{,}4)]$$

$$A_{(x)} = 0{,}5 * (0{,}4x^3 + x^2 + 3{,}4x + 2x^2 + 5x + 17 + 1{,}2x^2 + 3x + 10{,}2 - 0{,}4x^3 - x^2 - 3{,}4x)$$

$$A_{(x)} = 0{,}5 * (3{,}2x^2 + 8x + 27{,}2)$$

$A_{(x)} = 1{,}6x^2 + 4x + 13{,}6$ FE

1.4

Berechnung der Scheitelpunktkoordinaten von $A_{(x)}$

$A_{(x)} = 1{,}6x^2 + 4x + 13{,}6 \mid :1{,}6$

$\frac{A_{(x)}}{1{,}6} = x^2 + 2{,}5x + 8{,}5$

$\frac{A_{(x)}}{1{,}6} = (x + 1{,}25)^2 - 1{,}5625 + 8{,}5$

$\frac{A_{(x)}}{1{,}6} = (x + 1{,}25)^2 + 6{,}9375 \mid * 1{,}6$

$A_{(x)} = 1{,}6(x + 1{,}25)^2 + 11{,}1$

Für x = - 1,25 ist $A_{(x)}$ minimal und beträgt 11,1 FE.

1.6

Die Gerade BC der Form y = mx + b verläuft parallel zu AD --> sie haben die gleiche Steigung.

g hat die Steigung 0,2.

BC geht durch den Punkt (3|2)

In die Funktionsgleichung eingesetzt:

$2 = 0{,}2 * 3 + b \mid -0{,}6$

$b = 1{,}4$

$y = 0{,}2x + 1{,}4$

Die Schnittpunkte mit p ergeben die x-Koordinaten von B_2 und B_3.

$0{,}2x + 1{,}4 = - 0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}6 \mid -1{,}4$

$0{,}2x = - 0{,}4x^2 - 0{,}8x + 1{,}2 \mid -0{,}2x$

$- 0{,}4x^2 - x + 1{,}2 = 0 \mid *(-1)$

$0{,}4x^2 + x - 1{,}2 = 0 \mid :0{,}4$

$x^2 + 2,5x - 3 = 0$

p, q - Formel:

$p = 2,5,\ q = -3$

$x_{1,2} = \frac{-2,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 - (-3)}$

$x_{1,2} = -1,25 \pm \sqrt{4,56}$

$x_{1,2} = -1,25 \pm 2,14$

$x_1 = 0,89$

$x_2 = -3,39$

Koordinaten von $B_3(0,89|\ -0,4 * (0,89)^2 - 0,8 * 0,89 + 2,6 = 1,57)$

$B_3(0,89|1,57)$

Koordinaten von $B_2(-3,39|\ -0,4 * (-3,39)^2 - 0,8 * (-3,39) + 2,6 = 1,57)$

$B_2(-3,39|0,72)$