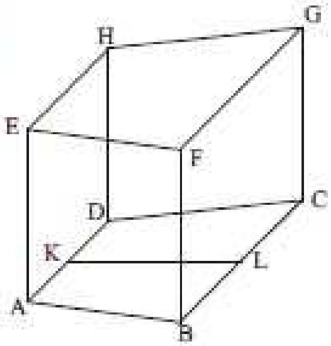
Prüfungsdauer:
150 Minuten

Abschlussprüfung 2015
an den Realschulen in Bayern

Mathematik I

Aufgabe B 2 **Haupttermin**



B 2.0 Das gleichschenklige Trapez ABCD hat die parallelen Seiten [AD] und [BC]. Der Mittelpunkt der Seite [AD] ist der Punkt K, der Mittelpunkt der Seite [BC] ist der Punkt L. Das Trapez ABCD ist die Grundfläche des geraden Prismas ABCDEFGH (siehe Skizze). Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A.

Es gilt: $\overline{AD} = 8\text{ cm}$; $\overline{BC} = 12\text{ cm}$; $\overline{KL} = 6\text{ cm}$; $\overline{AE} = 7\text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild des Prismas ABCDEFGH, wobei [KL] auf der Schrägbildachse und der Punkt K links vom Punkt L liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$. 2 P

B 2.2 Der Mittelpunkt der Kante [EH] ist der Punkt M, der Mittelpunkt der Kante [FG] ist der Punkt N. Für den Punkt S auf [MN] gilt: $\overline{SN} = 2\text{ cm}$.
Punkte P_n auf [KS] bilden zusammen mit den Punkten K und L Dreiecke KLP_n.
Die Winkel P_nLK haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]0°; 74{,}05°]$.
Zeichnen Sie die Strecke [MN], den Punkt S sowie das Dreieck KLP_1 für $\varphi = 45°$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Bestätigen Sie rechnerisch, dass der Winkel LKS das Maß 60,26° hat. 3 P

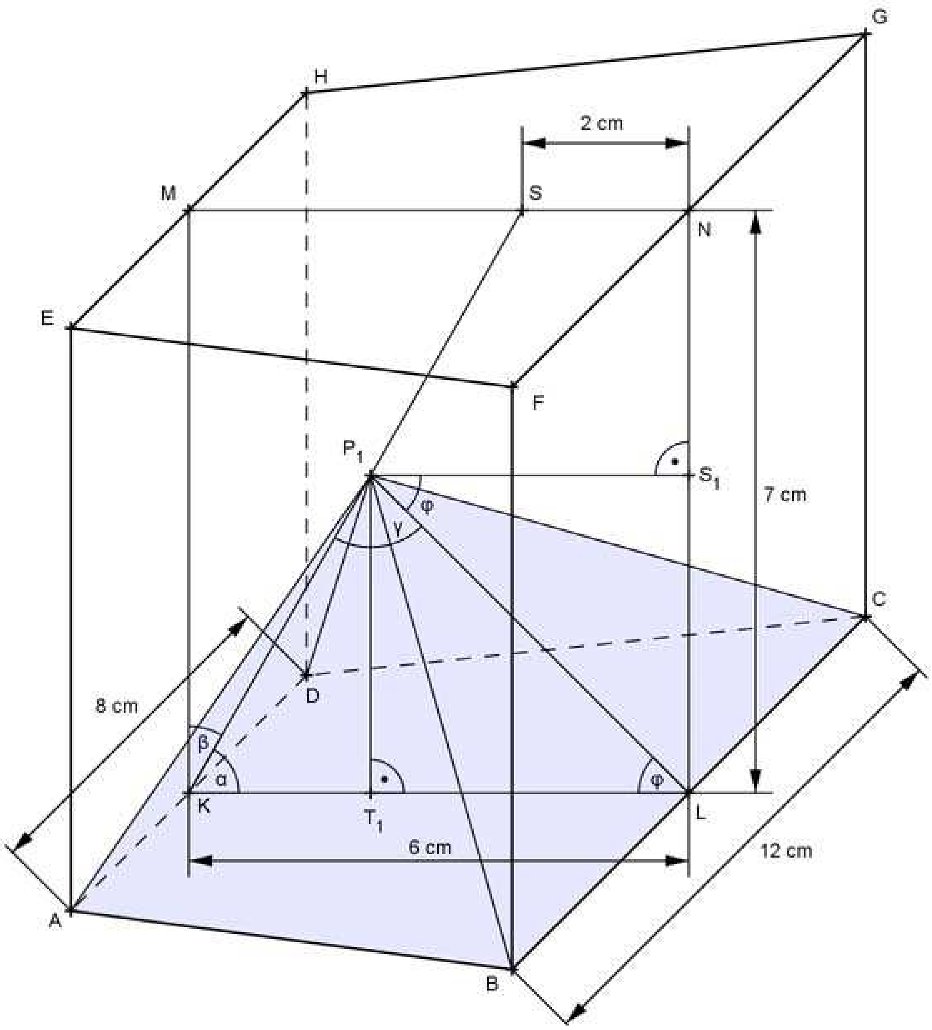
B 2.3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[LP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{LP_n}(\varphi) = \frac{5{,}21}{\sin(\varphi + 60{,}26°)}\text{ cm}$.
Geben Sie die minimale Länge der Strecken $[LP_n]$ an. 3 P

B 2.4 Unter den Dreiecken KLP_n gibt es das gleichschenklige Dreieck KLP_2 mit der Basis $[KP_2]$. Berechnen Sie die Länge der Strecke $[KP_2]$. 2 P

B 2.5 Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$ mit den Höhen $[P_nT_n]$ und T_n auf der Strecke [KL]. Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDP_1$ und ihre Höhe $[P_1T_1]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Zeigen Sie sodann rechnerisch, dass für das Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{104{,}20 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 60{,}26°)}\text{ cm}^3$. 3 P

B 2.6 Die Pyramide $BCGFP_3$ mit der rechteckigen Grundfläche BCGF und der Spitze P_3 hat dasselbe Volumen wie die Pyramide $ABCDP_3$.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ. 4 P

2.0, 2.1, 2.2, 2.5



2.2

Im Dreieck MSK gilt:

MS = MN - NS = 6 cm - 2 cm = 4 cm

$$\tan \beta = \frac{MS}{KM} = \frac{4\text{ cm}}{7\text{ cm}} = 0{,}5714 \rightarrow \beta = 29{,}74°$$

α = $90° - \beta = 90° - 29{,}74° =$ **60,26°**

2.3

In einem beliebigen Dreieck LPK gilt:

$\gamma = 180° - \alpha - \varphi = 180° - (\varphi + 60{,}26°)$

$\sin \gamma = 180° - (\varphi + 60{,}26°) = \sin (\varphi + 60{,}26°)$

Sinussatz:

$$\frac{KL}{\sin\gamma} = \frac{LP_{(\varphi)}}{\sin\alpha} \quad | \cdot \sin\alpha$$

$$\mathbf{LP_{(\varphi)}} = \frac{KL \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{6\text{ cm} \cdot \sin 60{,}26°}{\sin(\varphi + 60{,}26°)} = \mathbf{\frac{5{,}21\text{ cm}}{\sin(\varphi + 60{,}26°)}}$$

$LP_{(\varphi)}$ ist dann minimal, wenn sin (φ + 60,26°) maximal ist. Der Term

sin (φ + 60,26°) ist dann maximal, wenn er = 1 ist. --> **LP_{min} = 5,21 cm**

2.4

Für das gleichschenklige Dreieck KP_2L gilt:

$\alpha = \gamma$

$\varphi = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 60{,}26° - 60{,}26° = 59{,}48°$

$KL * LP_2 = 6$ cm

Kosinussatz:

$KP_2^2 = KL^2 + LP_2^2 - 2 * KL * LP_2 * \cos\varphi$

$KP_2^2 = 6^2 + 6^2 - 2 * 6 * 6 * \cos 59{,}48°\text{ cm}^2 = 35{,}44\text{ cm}^2 \ |\sqrt{}$

KP_2 = 5,95 cm

2.5

In einem beliebigen Dreieck LPT gilt:

$$\sin\varphi = \frac{PT}{LP} \quad | * LP$$

$$PT = LP * \sin\varphi = \frac{5{,}21\text{ cm} * \sin\varphi}{\sin(\varphi + 60{,}26°)}$$

$$V_{(\varphi)} = \frac{0{,}5 * (BC + AD) * KL * TP}{3} = \frac{0{,}5 * (12 + 8) * 6 * 5{,}21 * \sin\varphi}{3 * \sin(\varphi + 60{,}26°)}\text{ cm}^3$$

$$\mathbf{V_{(\varphi)}} = \mathbf{\frac{104{,}2 * \sin\varphi}{\sin(\varphi + 60{,}26°)}\textbf{ cm}^3}$$

2.6

In einem beliebigen Dreieck LSP gilt:

$$\cos\varphi = \frac{PS}{LP} \quad | \; *LP$$

$$PS = LP * \cos\varphi = \frac{5{,}21 * \cos\varphi}{\sin(\varphi + 60{,}26°)}$$

$V_{ABCDP} = V_{BCGFP}$

$$\frac{104{,}2 * \sin\varphi}{\sin(\varphi + 60{,}26°)} = \frac{BC * BF * SP}{3} = \frac{12 * 7 * 5{,}21 * \cos\varphi}{3 * \sin(\varphi + 60{,}26°)} \quad | \; *\sin(\varphi + 60{,}26°)$$

$104{,}2 * \sin\varphi = 145{,}88 * \cos\varphi \; | \; :\cos\varphi$

$104{,}2 * \tan\varphi = 145{,}88 \; | \; :104{,}2$

$\tan\varphi = 1{,}4$ --> **$\varphi = 54{,}46°$**