Prüfungsaufgaben Aufgabe 21

Abschlussprüfung 2003

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I **Aufgabengruppe A** **Aufgabe A 3**

A 3.0 Im gleichschenkligen Dreieck ABS ist M der Mittelpunkt der Basis [AB]. Das Dreieck ABS ist der Axialschnitt eines geraden Kreiskegels mit der Spitze S, dem Grundkreisradius $\overline{AM} = 4\text{ cm}$ und der Kegelhöhe $\overline{MS} = 10\text{ cm}$.

A 3.1 Zeichnen Sie das Dreieck ABS und berechnen Sie das Maß φ des Öffnungswinkels ASB des Kegels auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\varphi = 43{,}60°$] 2 P

A 3.2 Der Punkt P auf der Strecke [AS] mit $\overline{SP} = 5\text{ cm}$, die Punkte Q_n auf [MS] und der Punkt R auf [BS] sind Eckpunkte von Drachenvierecken SPQ_nR mit SM als Symmetrieachse und dem Diagonalenschnittpunkt D. Die Winkel Q_nPS haben das Maß ε. Dabei soll stets $\overline{SQ_n} > \overline{SD}$ gelten.
Zeichnen Sie das Drachenviereck SPQ_1R für $\varepsilon = 110°$ und den Punkt D in die Zeichnung zu 3.1 ein.
Ermitteln Sie sodann das Intervall für ε, sodass Drachenvierecke SPQ_nR entstehen. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $68{,}20° < \varepsilon \leq 139{,}08°$] 4 P

A 3.3 Unter den Drachenvierecken SPQ_nR gibt es eine Raute SPQ_2R.
Ermitteln Sie das zugehörige Winkelmaß ε. 1 P

A 3.4 Berechnen Sie die Länge $\overline{SQ_n}(\varepsilon)$ der Strecken $[SQ_n]$ in Abhängigkeit von ε.
[Ergebnis: $\overline{SQ_n}(\varepsilon) = \dfrac{5 \cdot \sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon + 21{,}80°)}\text{ cm}$] 2 P

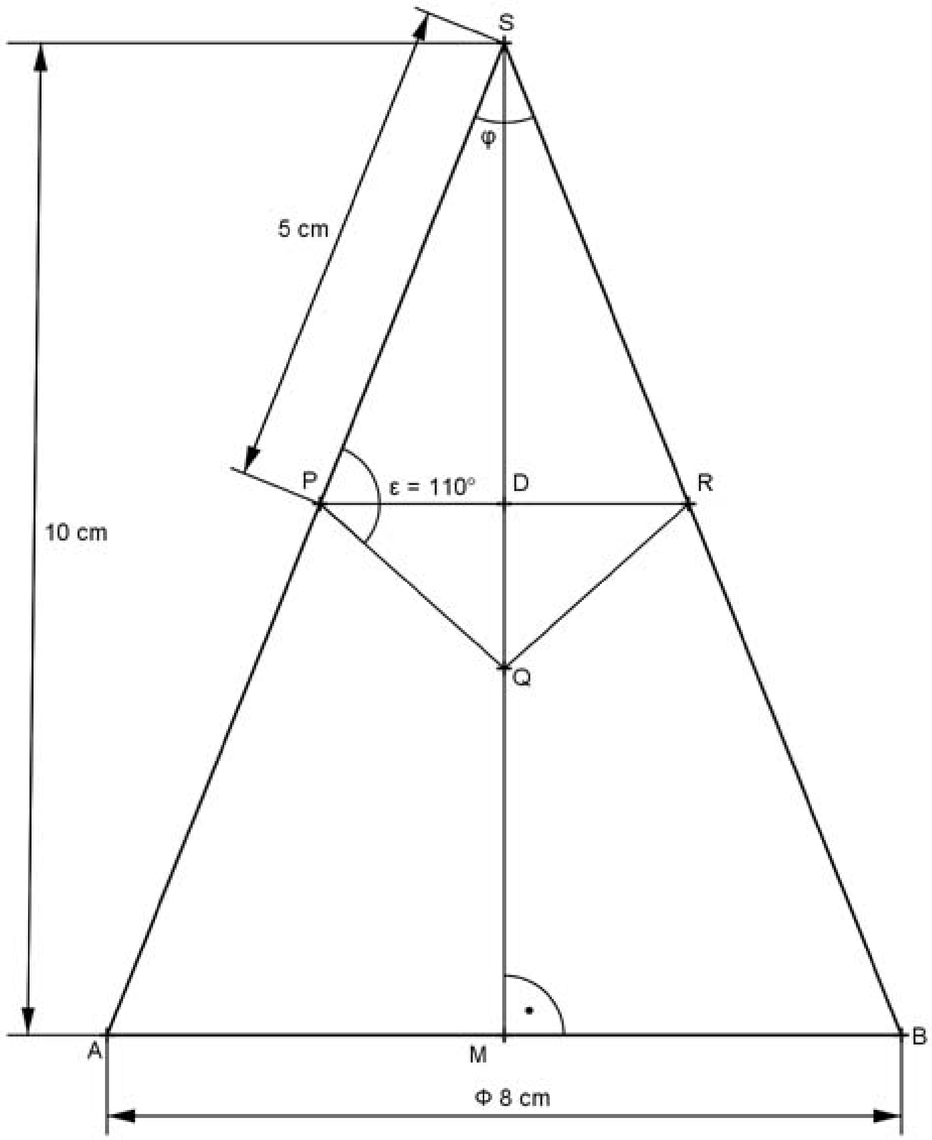
A 3.5 Die Drachenvierecke SPQ_nR rotieren um MS als Rotationsachse.
Zeigen Sie, dass für das Volumen V(ε) der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von ε gilt:

$$V(\varepsilon) = \frac{18{,}11 \cdot \sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon + 21{,}80°)}\text{ cm}^3.$$

(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 3 P

A 3.6 Das Volumen des aus dem Drachenviereck SPQ_3R entstandenen Rotationskörpers ist um 85% kleiner als das Volumen des in 3.0 beschriebenen Kegels.
Berechnen Sie das zugehörige Maß ε. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 3 P

3.0, 3.1, 3.2



3.1

Im Dreieck ABS gilt:

$$\tan \varphi/2 = \frac{AM}{MS} = \frac{4\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = 0{,}4 \dashrightarrow \varphi/2 = 21{,}8° \dashrightarrow \boldsymbol{\varphi = 43{,}60°}$$

3.2

Größter Winkel, wenn Q in M:

Kosinussatz im Dreieck PMS:

$PM^2 = MS^2 + PS^2 - 2 * MS * PS * \cos \varphi/2$

$PM^2 = 10^2 + 5^2 - 2 * 10 * 5 * \cos 21{,}8°$

$PM^2 = 32{,}15 \quad |\sqrt{\ }$

$PM = 5{,}67$ cm

Sinussatz im Dreieck PMS:

$$\frac{PM}{\sin \varphi/2} = \frac{MS}{\sin \varepsilon}$$

Über Kreuz multipliziert:

$PM * \sin \varepsilon = MS * \sin \varphi/2 \quad |:PM$

$$\sin \varepsilon = \frac{MS * \sin \varphi/2}{PM} = \frac{10 \text{ cm} * \sin 21{,}8°}{5{,}67 \text{ cm}} = 0{,}655 \text{ -->}$$

$(\varepsilon_1 = 40{,}92°)$ oder $\varepsilon_2 = 139{,}08°$

Kleinster Winkel ε, wenn Q in D:

$\varepsilon = 90° - 21{,}8° = 68{,}2°$

$68{,}20° < \varepsilon \leq 139{,}08°$

3.3

Für die Raute muss PS = PQ sein.

Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln 5 cm und den Basiswinkeln $\beta = \varphi/2 = 43{,}60°/2 = 21{,}80°$.

$\varepsilon =$ $180° - 2 * 21{,}80° =$ **$136{,}40°$**

3.4

Sinussatz im Dreieck PQS:

$\beta = 180° - (\varepsilon - \varphi/2)$

$\sin \beta = \sin (180° - (\varepsilon + \varphi/2)) = \sin (\varepsilon + \varphi/2)$

$$\frac{PS}{\sin \beta} = \frac{QS}{\sin \varepsilon} \quad | *\sin \varepsilon$$

$$QS_{(\varepsilon)} = \frac{PS * \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \varphi/2)} = \frac{5 * \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + 21{,}8°)} \text{ cm}$$

3.5

Im Dreieck PDS gilt:

$$\sin \varphi/2 = \frac{PD}{PS} \mid *PS$$

PD = PS * sin φ/2 = 5 cm * sin 21,8° = 1,86 cm

$$V_{(\varepsilon)} = \frac{\pi * PD^2 * (DS + DQ)}{3} = \frac{\pi * PD^2 * QS}{3}$$

$$V_{(\varepsilon)} = \frac{\pi * 1{,}86^2 * 5 * \sin \varepsilon}{3 * \sin (\varepsilon + 21{,}8°)} = \frac{18{,}11 * \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + 21{,}8°)}$$

3.6

$$V_{Kegel} = \frac{\pi * AM^2 * MS}{3} = \frac{\pi * 4^2 * 10}{3} = 167{,}47 \text{ cm}^3$$

85% kleiner bedeutet, es sind noch 15%.

$167{,}47 \text{ cm}^3 * 0{,}15 = 25{,}12 \text{ cm}^3$

$$25{,}12 = \frac{18{,}11 * \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + 21{,}8)} \mid * \sin (\varepsilon + 21{,}8°)$$

25,12 * sin (ε + 21,8°) = 18,11 * sin ε | :25,12

sin (ε + 21,8°) = 0,72 * sin ε

sin ε * cos 21,8° + cos ε * sin 21,8° = 0,72 * sin ε

sin ε * 0,9285 + 0,3714 * cos ε = 0,72 * sind ε |- 0,72 * sind ε

sin ε * 0,9285 - 0,72 * sin ε + 0,3714 * cos ε = 0 |- 0,3714 * cos ε

sin ε * 0,9285 - 0,72 * sind ε = 0 |- 0,3714 * cos ε

$0{,}2085 * \sin \varepsilon = - 0{,}3714 * \cos \varepsilon$ |: $\cos \varepsilon$

$0{,}2085 * \tan \varepsilon = - 0{,}3714$ | :0,2085

$\tan \varepsilon = - 1{,}7813$ --> **ε =** (- 60,69°) oder 180° - 60,69° = **119,31°**