Abschlussprüfung 2016
an den Realschulen in Bayern

Prüfungsdauer:
150 Minuten

Mathematik I

Aufgabe B 2 **Haupttermin**

B 2.0 Das gleichschenklige Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide ABCS. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Basis $[BC]$. Die Pyramidenspitze S liegt senkrecht über dem Punkt M.

Es gilt: $\overline{AM} = 9$ cm; $\overline{BC} = 12$ cm; $\overline{MS} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei die Strecke $[AM]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt M liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[AS]$ sowie das Maß des Winkels MAS.
$\left[\text{Ergebnisse: } \overline{AS} = 13{,}45 \text{ cm}; \ \sphericalangle MAS = 48{,}01°\right]$ 4 P

B 2.2 Auf der Strecke $[AS]$ liegen Punkte P_n. Die Winkel P_nMA haben das Maß φ mit $\varphi \in \left]0°; 90°\right[$.
Die Dreiecke AMP_n sind die Grundflächen von Pyramiden AMP_nC, deren Spitze der Punkt C ist.
Zeichnen Sie die Pyramide AMP_1C für $\varphi = 65°$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein. 1 P

B 2.3 Berechnen Sie die Länge der Strecken $[AP_n]$ in Abhängigkeit von φ und zeigen Sie sodann, dass für das Volumen V der Pyramiden AMP_nC in Abhängigkeit von φ gilt:
$V(\varphi) = \dfrac{60{,}20 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 48{,}01°)}$ cm³.

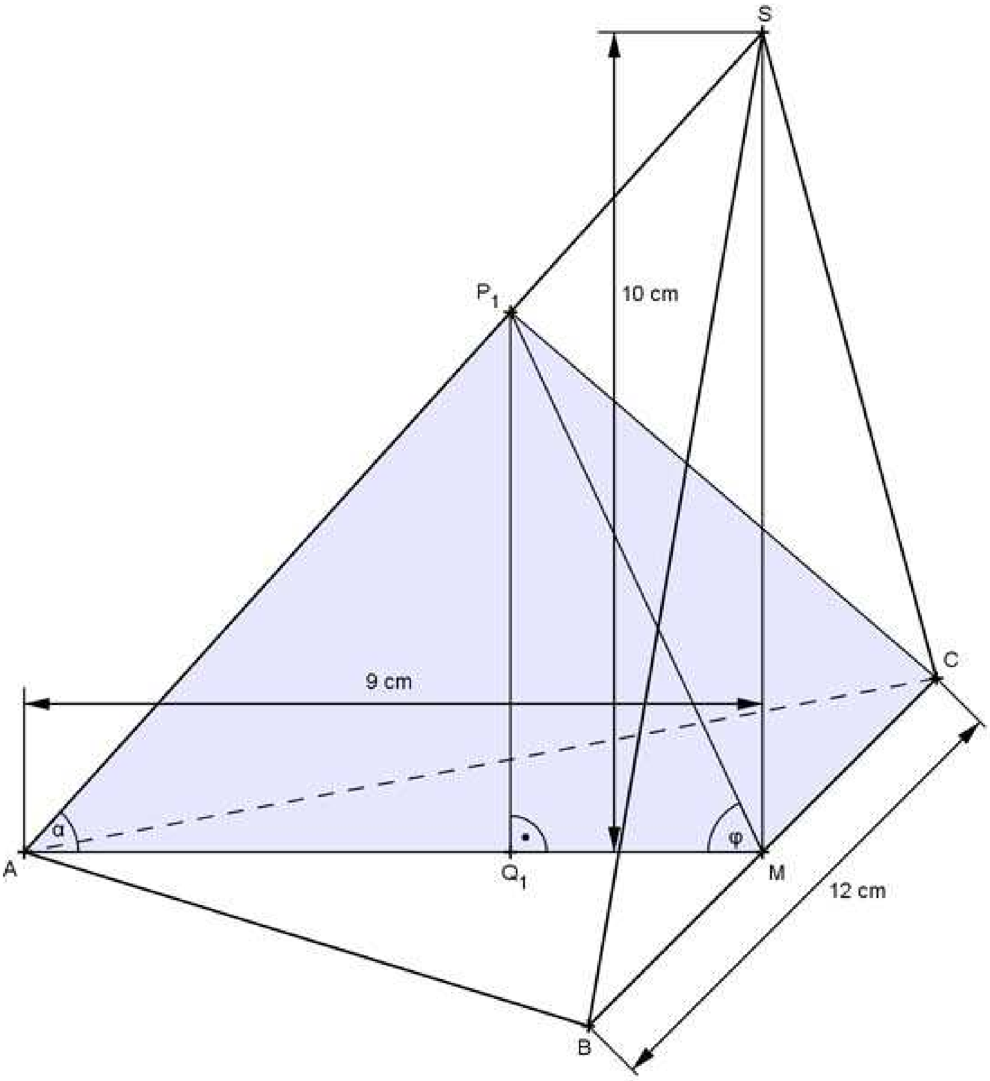
$\left[\text{Ergebnis: } \overline{AP_n}(\varphi) = \dfrac{9 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 48{,}01°)} \text{ cm}\right]$ 3 P

B 2.4 Die Grundfläche der Pyramide AMP_2C ist das rechtwinklige Dreieck AMP_2 mit der Hypotenuse $[AM]$.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide AMP_2C am Volumen der Pyramide ABCS. 3 P

B 2.5 Das gleichschenklige Dreieck ACP_3 mit der Basis $[CP_3]$ ist eine Seitenfläche der Pyramide AMP_3C.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ. 4 P

B 2.6 Begründen Sie, dass für das Volumen V der Pyramiden AMP_nC gilt: $V \leqq 90$ cm³. 2 P

2.0, 2.1, 2.2



2.1

Satz von Pythagoras im Dreieck AMS:

$AS^2 = AM^2 + MS^2 = 9^2 + 10^2 = 181\ cm^2\ |\sqrt{}$

$AS = 13{,}45\ cm$

$$\tan \alpha = \frac{MS}{AM} = \frac{10\ cm}{9\ cm} = 1{,}1111 \longrightarrow \boldsymbol{\alpha = 48{,}01°}$$

2.2

Sinussatz in einem beliebigen Dreieck AMP:

$\beta = 180° - \alpha - \varphi = 180° - (48{,}01° + \varphi)$

$\sin \beta = \sin 180° - (48{,}01° + \varphi) = \sin (48{,}01° + \varphi)$

$$\frac{AM}{\sin \beta} = \frac{AP}{\sin \varphi} \quad | \cdot \sin \varphi$$

$$\mathbf{AP_{(\varphi)}} = \frac{AM \cdot \sin \varphi}{\sin (48{,}01° + \varphi)} = \mathbf{\frac{9\ cm \cdot \sin \varphi}{\sin (48{,}01° + \varphi)}}$$

In einem beliebigen Dreieck AQP gilt:

$$\sin \alpha = \frac{PQ}{AP_{(\varphi)}} \quad | \cdot AP_{(\varphi)}$$

$$PQ_{(\varphi)} = \sin \alpha \cdot AP_{(\varphi)} = \frac{9\ cm \cdot \sin \varphi \cdot \sin 48{,}01°}{\sin (48{,}01° + \varphi)} = \frac{6{,}69\ cm \cdot \sin \varphi}{\sin (48{,}01° + \varphi)}$$

$MC = BC/2 = 12\ cm/2 = 6\ cm$

$$V_{(\varphi)} = \frac{0{,}5 \cdot AM \cdot PQ_{(\varphi)} \cdot MC}{3 \cdot \sin (48{,}01° + \varphi)} = \frac{0{,}5 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6{,}69 \cdot \sin \varphi}{3 \cdot \sin (48{,}01° + \varphi)}\ cm^3$$

$$\mathbf{V_{(\varphi)} = \frac{60{,}21 \cdot \sin \varphi}{\sin (48{,}01° + \varphi)}\ cm^3}$$

2.4

$$V_{ABCS} = \frac{0{,}5 \cdot BC \cdot AM \cdot MS}{3} = \frac{0{,}5 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10}{3}\ cm^3 = 180\ cm^3$$

Im Dreieck AMP_2 gilt:

$\varphi = 90° - \varphi = 90° - 48{,}01° = 41{,}99°$

$$V_{(41{,}99°)} = \frac{60{,}21 \cdot \sin 41{,}99°}{\sin (48{,}01° + 41{,}99°)}\ cm^3 = 40{,}28\ cm^3$$

Verhältnisgleichung:

$180\ cm^3 : 100\% = 40{,}28\ cm^3 : x\%$

$180 \cdot x = 40{,}28 \cdot 100 \quad | :180$

$$\mathbf{x} = \frac{40{,}28 \cdot 100}{180} = \mathbf{22{,}38\%}$$

2.5

Satz von Pythagoras im Dreieck AMC:

$AC^2 = AM^2 + MC^2 = 9^2 + 6^2 = 117\ cm^2$ |√

$AC = 10,82$ cm

$AC = AP_2$

$$10,82 = \frac{9 * \sin \varphi}{\sin (48,01° + \varphi)} \quad | *(\sin (48,01° + \varphi)$$

$10,82 * \sin (48,01° + \varphi) = 9 * \sin \varphi$ | :10,82

$\sin 48,01° * \cos \varphi + \cos 48,01° * \sin \varphi = 0,83 * \sin \varphi$ | :cos φ

$0,7433 + 0,669 * \tan \varphi = 0,83 * \tan \varphi$ | - 0,669 * tan φ

$0,7433 = 0,161 * \tan \varphi$ | : 0,161

$\tan \varphi = 4,6168$ --> **$\varphi = 77,78°$**

2.6

V_{AMPC} wird dann am größten, wenn AP = AS -->

$$\mathbf{V_{AMPCmax}} = \frac{0,5 * MC * AM * MS}{3} = \frac{0,5 * 6 * 9 * 10}{3}\ cm^3 = \mathbf{90\ cm^3} \text{ -->}$$

Es gibt kein Volumen > 90 cm³ für V_{AMPC}.