Prüfungsaufgaben Aufgabe 27

Abschlussprüfung 2003

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I **Nachtermin** **Aufgabe C 3**

C 3.0 Das gleichschenklige Trapez ABCD mit $[AD] \parallel [BC]$ ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Der Mittelpunkt von [AD] ist E, der Mittelpunkt von [BC] ist F. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über E.
Für die Streckenlängen gilt: $\overline{EF} = 6$ cm, $\overline{AD} = 12$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm und $\overline{ES} = 10$ cm.

C 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [EF] auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann das Maß ε des Winkels SFE und die Länge der Strecke [FS] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Ergebnis: $\varepsilon = 59{,}04°$; $\overline{FS} = 11{,}66$ cm] 4 P

C 3.2 Die Strecken $[P_nQ_n]$ mit $P_n \in [BS]$ und $Q_n \in [CS]$ verlaufen parallel zur Strecke [BC]. Die Punkte A, D, Q_n und P_n sind die Eckpunkte von gleichschenkligen Trapezen. Die Streckenlängen $\overline{EM_n}$ mit $M_n \in [FS]$ sind die Höhen der Trapeze ADQ_nP_n. Die Strecken $[EM_n]$ schließen mit der Strecke [EF] die Winkel FEM_n mit dem Maß φ ein.
Zeichnen Sie das Trapez ADQ_1P_1 für $\varphi = 65°$ in das Schrägbild zu 3.1 ein. 1 P

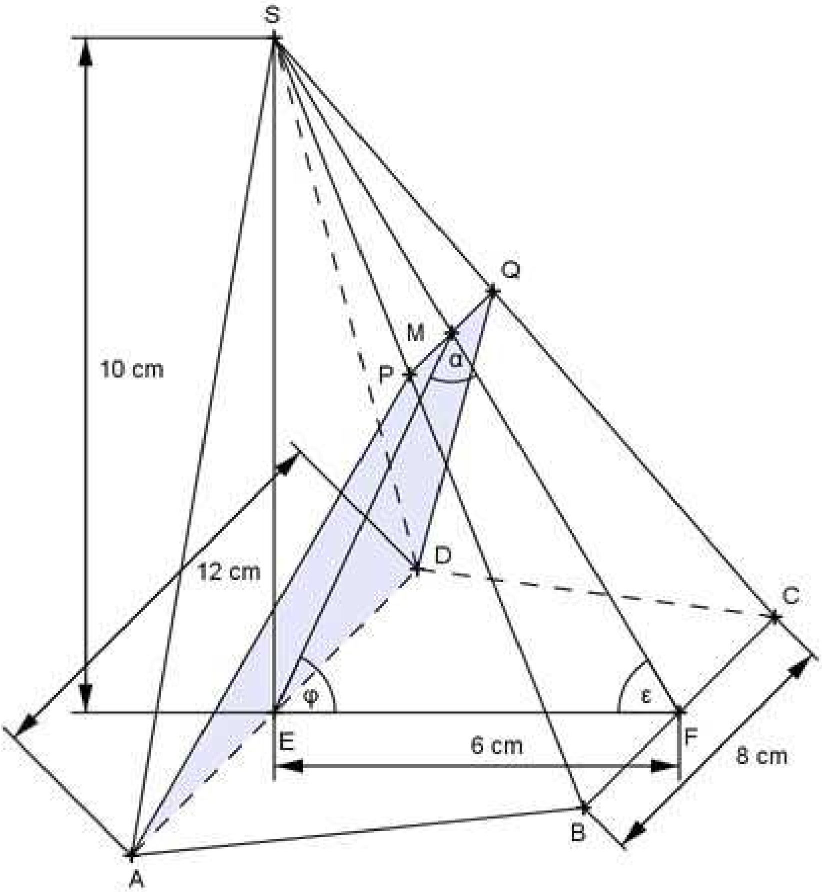
C 3.3 Von den Strecken $[EM_n]$ besitzt die Strecke $[EM_0]$ die kleinste Länge.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ sowie die Streckenlänge $\overline{EM_0}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. 2 P

C 3.4 Für welchen Wert von φ gilt $\overline{EM_2} = \overline{EF}$? 1 P

C 3.5 Die Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}(\varphi)$ kann man durch $\overline{P_nQ_n}(\varphi) = \left(8 - \frac{4{,}12 \cdot \sin\varphi}{\sin(59{,}04° + \varphi)}\right)$ cm
oder auch durch $\overline{P_nQ_n}(\varphi) = \frac{6{,}86 \cos\varphi}{\sin(59{,}04° + \varphi)}$ cm darstellen.
Ermitteln Sie rechnerisch einen der beiden Terme. 4 P

C 3.6 Unter den Trapezen ADQ_nP_n gibt es ein Trapez ADQ_3P_3, dessen Seite $[P_3Q_3]$ halb so lang wie die Seite [AD] ist.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 3 P

3.0, 3.1, 3.2



3.1

Im Dreieck EFS gilt:

$$\tan \varepsilon = \frac{ES}{EF} = \frac{10\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 1{,}667 \dashrightarrow \boldsymbol{\varepsilon = 59{,}04°}$$

$$\sin \varepsilon = \frac{ES}{FS} \quad | \cdot FS$$

$$FS \cdot \sin \varepsilon = ES \quad | :\sin \varepsilon$$

$$\boldsymbol{FS =} \frac{ES}{\sin \varepsilon} = \frac{10\text{ cm}}{\sin 59{,}04°} = \boldsymbol{11{,}66\text{ cm}}$$

3.3

Kleinste Länge bedeutet, EM steht senkrecht auf FS.

Im rechtwinkligen Dreieck EMF gilt:

$$\sin \varepsilon = \frac{EM}{EF} \quad | * EF$$

EM = sin 59,04° * 6 cm = **5,15 cm**

φ = 90° - ε = 90° - 59,04° **= 30,96°**

3.4

Dann ist das Dreieck EFM_2 gleichschenklig, und es gilt:

φ = 180° - 2 * ε = 180° - 2 * 59,04° = **61,92°**

3.5

$\alpha = 180° - (\varphi + \varepsilon)$

Im Dreieck EMF gilt:

$$\frac{EF}{\sin ((180° - (\varphi + \varepsilon))} = \frac{MF}{\sin \varphi} \quad | * \sin \varphi$$

$\sin ((180° - (\varphi + \varepsilon)) \sin (\varphi + \varepsilon)$

$$MF = \frac{EF * \sin \varphi}{\sin (\varphi + \varepsilon)} = \frac{6 * \sin \varphi}{\sin (\varphi + 59{,}04°)}$$

Strahlensatz:

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{FS}{FS - FM}$$

Über Kreuz multipliziert:

$BC * (FS - FM) = PQ * FS$

$$PQ_{(\varphi)} = \frac{BC * (FS - FM)}{FS} = \frac{8 * \left(11{,}66 - \dfrac{6 * \sin \varphi}{\sin (\varphi + 59{,}04°)}\right)}{11{,}66} \quad \text{cm}$$

$$PQ_{(\varphi)} = 8 - \frac{4{,}12 * \sin \varphi}{\sin(\varphi + 59{,}04°)} \text{ cm}$$

3.6

$P_3Q_3 = 0{,}5 * AD = 0{,}5 * 12 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$

$$6 = 8 - \frac{4{,}12 * \sin}{\sin(\varphi + 59{,}04°)} \quad | - 8$$

$$- 2 = - \frac{4{,}12 * \sin}{\sin(\varphi + 59{,}04°)} \quad | * \sin(\varphi + 59{,}04°)$$

$- 2 * \sin(\varphi + 59{,}04°) = - 4{,}12 * \sin \varphi \quad | :(-2)$

$\sin(\varphi + 59{,}04°) = 2{,}06 * \sin \varphi$

$\sin \varphi * \cos 59{,}04° + \cos \varphi * \sin 59{,}04° = 2{,}06 * \sin \varphi$

$\sin \varphi * 0{,}5144 + \cos \varphi * 0{,}8575 = 2{,}06 * \sin \varphi \quad | - 0{,}5144 * \sin \varphi$

$\cos \varphi * 0{,}8575 = 2{,}06 * \sin \varphi - 0{,}5144 * \sin \varphi$

$\cos \varphi * 0{,}8575 = 1{,}5456 * \sin \varphi \quad | : \cos \varphi$

$0{,}8575 = 1{,}5456 * \tan \varphi \quad | : 1{,}5456$

$\tan \varphi = 0{,}5548$ --> $\boldsymbol{\varphi = 29{,}02°}$ oder $(180° + 29{,}02° = 209{,}02°)$