Abschlussprüfung 2002

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I **Aufgabengruppe A** **Aufgabe A 3**

A 3.0 Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide ABCS. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Hypotenuse [BC] mit $\overline{BC} = 14\text{ cm}$. Die Pyramidenspitze S ist Eckpunkt des Dreiecks AMS, das senkrecht auf der Grundfläche ABC steht, und es gilt: $\overline{MS} = 10\text{ cm}$ und $\sphericalangle SMA = 80°$.

A 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei [AM] auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$

Berechnen Sie sodann die Länge der Seitenkante [AS] sowie das Maß ε des Winkels MAS. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

[Teilergebnis: $\overline{AS} = 11{,}17\text{ cm}$; $\varepsilon = 61{,}85°$]

A 3.2 Punkte P_n auf der Kante [AS] sind zusammen mit den Punkten B und C die Eckpunkte von Dreiecken BCP_n. Für das Maß φ der Winkel P_nMA soll gelten: $0° < \varphi < 80°$.
Zeichnen Sie den Punkt P_1 und das Dreieck BCP_1 für $\varphi = 40°$ in das Schrägbild zu 3.1 ein.

A 3.3 Zeigen Sie, dass für die Längen $\overline{P_nM}(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{P_nM}(\varphi) = \frac{6{,}17}{\sin(\varphi + 61{,}85°)}\text{ cm}$$

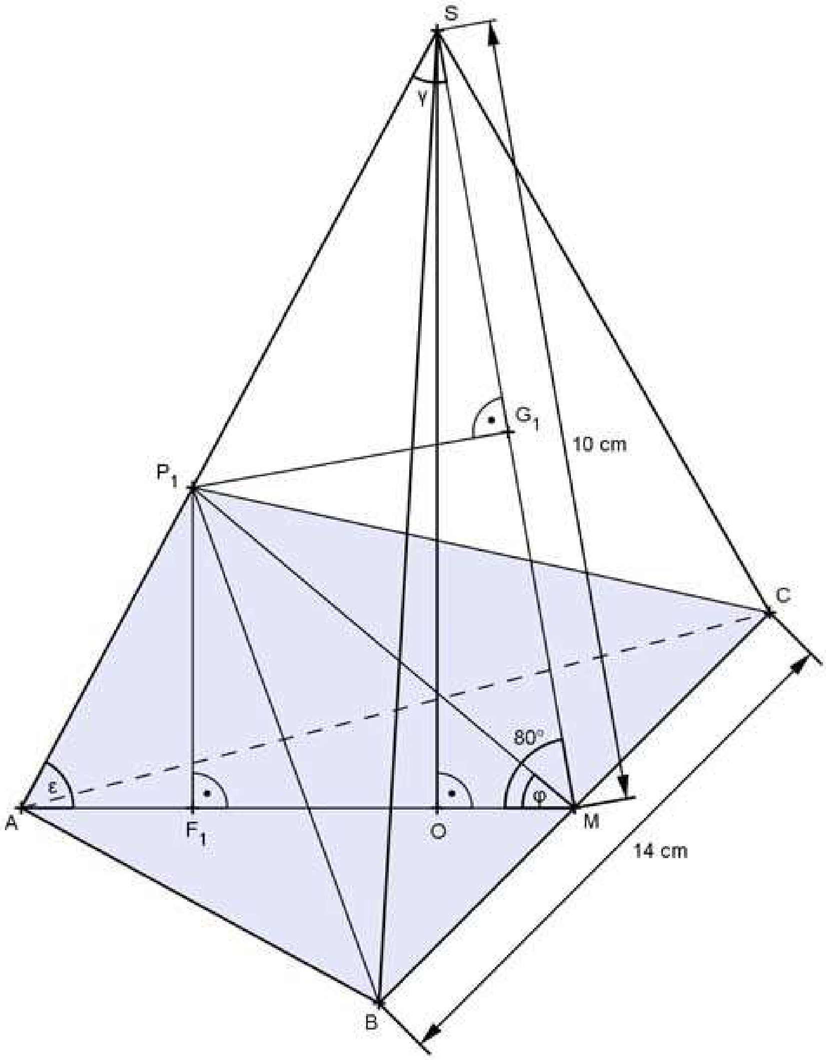
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

A 3.4 Die Dreiecke BCP_n teilen die Pyramide ABCS jeweils in zwei Teilpyramiden:
Die Pyramiden $ABCP_n$ mit der Grundfläche ABC und der jeweiligen Höhe $[P_nF_n]$ mit F_n auf [AM] sowie die Pyramiden $BCSP_n$ mit der Grundfläche BCS und der jeweiligen Höhe $[P_nG_n]$ mit G_n auf [MS].
Zeichnen Sie für P_1 die Höhen $[P_1F_1]$ und $[P_1G_1]$ in das Schrägbild zu 3.1 ein.

A 3.5 Ermitteln Sie rechnerisch die Längen $\overline{P_nF_n}(\varphi)$ und $\overline{P_nG_n}(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ. Berechnen Sie sodann das Maß für φ, mit dem die Höhe $[P_2F_2]$ doppelt so lang wie die Höhe $[P_2G_2]$ ist. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

[Teilergebnis: $\overline{P_nF_n}(\varphi) = \frac{6{,}17 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 61{,}85°)}\text{ cm}$; $\overline{P_nG_n}(\varphi) = \frac{6{,}17 \cdot \sin(80° - \varphi)}{\sin(\varphi + 61{,}85°)}\text{ cm}$]

3.1, 3.2, 3.4



Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig --> die Winkel bei B und bei C sind = 45°.

Dreieck ABM ist die Hälfte von Dreieck ABC und gleichschenklig rechtwinklig (A liegt auf dem Thaleskreis über BC) --> AM = BM und der Winkel BAM = 45° und.

AM halbiert BC --> BM = AM = 7 cm

Im Dreieck SOM gilt:

$$\cos 80° = \frac{OM}{MS} = \frac{OM}{10\text{ cm}} \quad | \cdot 10\text{ cm}$$

$OM = \cos 80° * 10\ cm = 0{,}1736 * 10\ cm = 1{,}74\ cm$
$AO = AM - OM = 7\ cm - 1{,}74\ cm = 5{,}26\ cm$

Satz von Pythagoras im Dreieck AOS:

$AS^2 = AO^2 + OS^2 = 5{,}26^2\ cm^2 + 9{,}85^2\ cm^2$

$AS^2 = 124{,}7\ cm^2\ |\sqrt{}$

$AS = 11{,}17\ cm$

Sinussatz im Dreieck AMS:

$$\frac{MS}{\sin \varepsilon} = \frac{AS}{\sin 80°}$$

$$\frac{10\ cm}{\sin \varepsilon} = \frac{11{,}17\ cm}{\sin 80°}$$

Über Kreuz multipliziert:

$10\ cm * \sin 80° = 11{,}17\ cm * \sin \varepsilon\ |\ :11{,}17\ cm$

$$\sin \varepsilon = \frac{10\ cm * 0{,}9848}{11{,}17} = 0{,}8817 \dashrightarrow \mathbf{\varepsilon = 61{,}85°}$$

3.3

$\gamma = 180° - 80° - 61{,}84° = 38{,}16°$

Im Dreieck AMP gilt:

$\gamma = 180° - (\varepsilon + \varphi)$

Sinussatz im Dreieck AMP:

$$\frac{AM}{\sin \gamma} = \frac{PM}{\sin \varepsilon}$$

Über Kreuz multipliziert:

$AM * \sin \varepsilon = PM * \sin (180° - (\varepsilon + \varphi))$

$\sin (180° - (\varepsilon + \varphi)) = \sin (\varepsilon + \varphi)$

$AM * \sin \varepsilon = PM * \sin (\varepsilon + \varphi)$

$7\ \text{cm} * \sin 61{,}85° = PM * (\varphi + 61{,}85°)\ |\ :(\varphi + 61{,}85°)$

$$\mathbf{PM_{(\varphi)}} = \frac{7\ \text{cm} * 0{,}8817}{(\varphi + 61{,}85°)} = \mathbf{\frac{6{,}17}{(\varphi + 61{,}85°)}\ cm}$$

3.5

Im rechtwinkligen Dreieck FMP gilt:

$$\sin \varphi = \frac{PF}{PM}\ |\ *PM$$

$PF_{(\varphi)} = PM_{(\varphi)} * \sin \varphi$

$$\mathbf{PF_{(\varphi)}} = \mathbf{\frac{6{,}17 * \sin \varphi}{(\varphi + 61{,}85°)}\ cm}$$

Im Dreieck PMG gilt:

Winkel bei M = $80° - \varphi$

$$\sin (80° - \varphi) = \frac{PG}{PM}\ |\ *PM$$

$PG_{(\varphi)} = \sin (80° - \varphi) * PM_{(\varphi)}$

$$\mathbf{PG_{(\varphi)}} = \mathbf{\frac{6{,}17 * \sin (80° - \varphi)}{(\varphi + 61{,}85°)}}$$

Bedingung:

$PF_{(\varphi)} = 2 * PG_{(\varphi)}$

$$\frac{6{,}17 * \sin \varphi}{(\varphi + 61{,}85°)} = 2 * \frac{6{,}17 * \sin (80° - \varphi)}{(\varphi + 61{,}85°)}\ |\ *(\varphi + 61{,}85°)$$

$6{,}17 * \sin \varphi = 2 * 6{,}17 * \sin (80° - \varphi)\ |\ :6{,}17$

$\sin \varphi = 2 * \sin (80° - \varphi)\ |\ :2$

$0{,}5 * \sin \varphi = \sin (80° - \varphi) \mid :2$

$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \sin \beta$

$0{,}5 * \sin \varphi = \sin 80° * \cos \varphi - \cos 80° * \sin \varphi \mid :\cos \varphi$

$0{,}5 * \tan \varphi = 0{,}9848 - 0{,}1736 * \tan \varphi \mid +0{,}1736 * \tan \varphi$

$0{,}6736 * \tan \varphi = 0{,}9848 \mid :0{,}6736$

$\tan \varphi = 1{,}462$ --> **$\varphi = 55{,}63°$**