Prüfungsaufgaben Aufgabe 39

| Prüfungsdauer: 150 Minuten | **Abschlussprüfung 2004** an den Realschulen in Bayern | **R4/R6** |
|---|---|---|

**Mathematik I** **Aufgabengruppe A** **Aufgabe A 3**

A 3.0 Das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge 9 cm ist die Grundfläche der Pyramide PQRS mit der Spitze S. Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke [QP]. Der Fußpunkt H der Pyramidenhöhe [SH] liegt auf der Geraden FR. Das Maß des Winkels RFS beträgt 120° und es gilt $\overline{FS} = 10$ cm.

A 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide PQRS. Dabei soll die Strecke [FR] auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann die Streckenlänge $\overline{RS}$ und das Maß $\gamma$ des Winkels SRF. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $\overline{RS} = 15{,}45$ cm; $\gamma = 34{,}09°$] 4 P

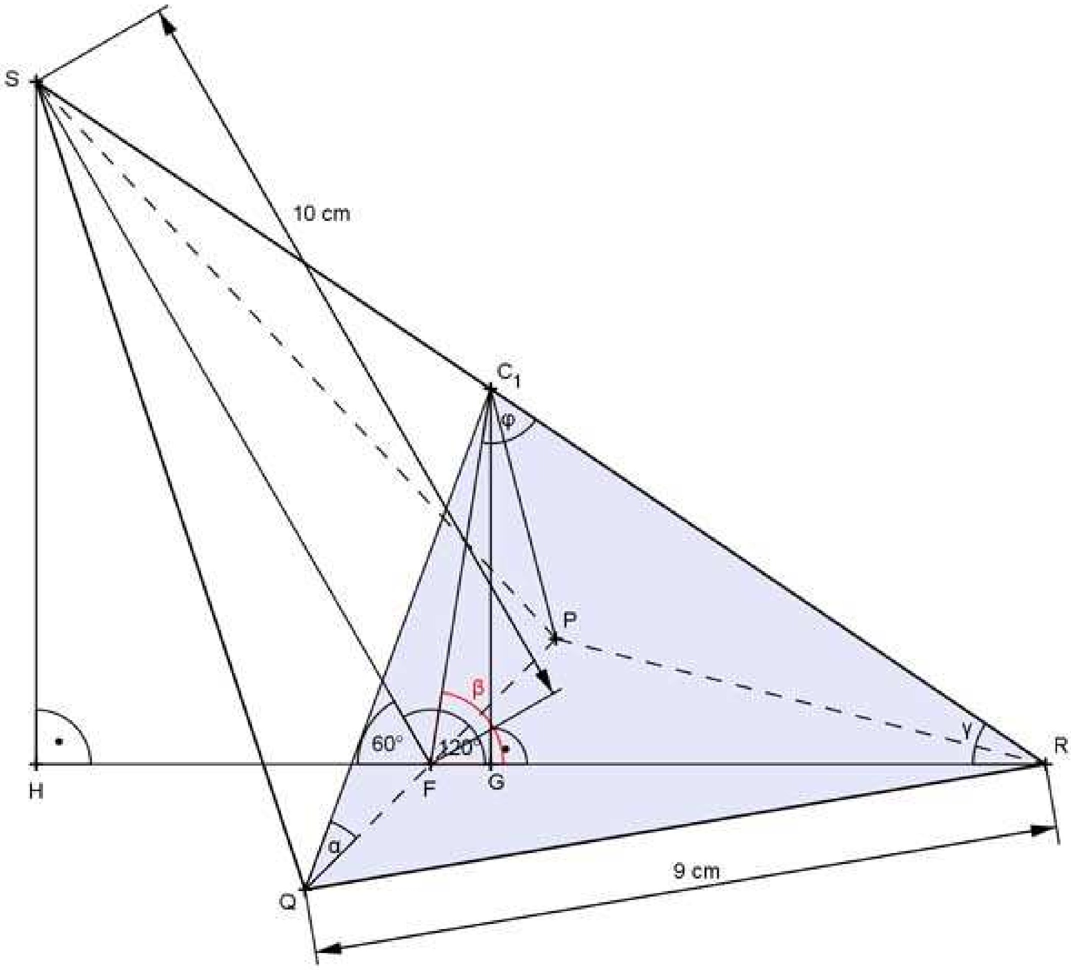
A 3.2 Punkte $C_n$ auf der Seitenkante [RS] sind Spitzen von Pyramiden $PQRC_n$. Die Winkel $FC_nR$ haben das Maß $\varphi$.
Zeichnen Sie in das Schrägbild zu 3.1 die Pyramide $PQRC_1$ für $\varphi = 65°$ ein.
Geben Sie das Intervall für $\varphi$ an, sodass man Pyramiden $PQRC_n$ erhält. Berechnen Sie dazu die Intervallgrenzen auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. 3 P

A 3.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen $V(\varphi)$ der Pyramiden $PQRC_n$ in Abhängigkeit von $\varphi$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $\overline{C_nR}(\varphi) = \frac{7{,}79\sin(\varphi + 34{,}09°)}{\sin\varphi}$ cm] 4 P

A 3.4 Das Maß $\alpha$ der Winkel $PQC_n$ in den Dreiecken $QPC_n$ hängt vom Maß $\varphi$ der Winkel $FC_nR$ ab.
Berechnen Sie die Länge der Strecken $[FC_n]$ in Abhängigkeit von $\varphi$ und zeigen Sie, dass gilt: $\tan\alpha = \frac{0{,}97}{\sin\varphi}$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 2 P

A 3.5 Unter den Pyramiden $PQRC_n$ gibt es zwei Pyramiden $PQRC_2$ und $PQRC_3$, bei denen die Maße der Winkel $QC_2P$ und $QC_3P$ jeweils 90° betragen.
Ermitteln Sie rechnerisch das jeweils zugehörige Winkelmaß $\varphi$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. 2 P

**3.0 - 3.2**




**3.1**

Im Dreieck HFS gilt:

$$\sin 60° = \frac{HS}{FS} \quad | \cdot FS$$

HS = FS * sin 60° = 10 cm * 0,866 = 8,66 cm

$$\cos 60° = \frac{HF}{FS} \quad | \cdot FS$$

HF = FS * cos 60° = 10 cm * 0,5 = 5 cm

In einem gleichseitigen Dreieck gilt:

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Hier:

$$FR = \frac{9\ cm}{2} * \sqrt{3} = 7,79\ cm$$

Satz von Pythagoras im Dreieck HRS:

$HR = HF + FR = 5\ cm + 7,8\ cm = 12,8\ cm$

$RS^2 = HR^2 + HS^2 = 12,8^2 + 8,66^2 = 238,84\ |\sqrt{\ }$

**$RS = 15,45\ cm$**

Im Dreieck HRS gilt:

$$\tan \gamma = \frac{HS}{FR} = \frac{8,66\ cm}{12,8\ cm} = 0,6766 \text{ --> } \boldsymbol{\gamma = 34,08°}$$

**3.2**

Fällt der Punkt C mit den Punkten R bzw. S zusammen, entsteht keine Pyramide mehr.

Fällt er mit S zusammen, dann ist $\varphi = 180° - 120° - \gamma =$

$= 180° - 120° - 34,08° = 25,92°$ = untere Intervallgrenze.

Fällt er mit R zusammen, dann ist $\varphi = 180° - \gamma =$

$= 180° - 34,08° = 145,92°$

**$25,92° < \varphi < 145,92°$**

**3.3**

$$V = \frac{\frac{PQ * FR}{2} * CG}{3} = \frac{PQ * FR * CG}{6}$$

Im Dreieck FRC gilt:

$\beta = 180° - (\varphi + \gamma) = 180° - (\varphi + 34,08°)$

Sinussatz:

$$\frac{CR}{\sin 180° - (\varphi + \gamma)} = \frac{FR}{\sin \varphi} \quad | \cdot \sin 180° - (\varphi + \gamma)$$

$$CR_{(\varphi)} = \frac{7{,}79\text{ cm} * \sin(\varphi + 34{,}08°)}{\sin \varphi}$$

Strahlensatz:

$$\frac{CG}{HS} = \frac{CR}{RS} \quad | \ {*}HS$$

$$CG = \frac{HS * CR}{RS} = \frac{\dfrac{7{,}79\text{ cm} * 8{,}66\text{ cm} * \sin(\varphi + 34{,}08°)}{\sin \varphi}}{15{,}45\text{ cm}}$$

$$CG_{(\varphi)} = \frac{4{,}37 * \sin(\varphi + 34{,}08°)}{\sin \varphi}$$

$$V = \frac{\dfrac{9\text{ cm} * 7{,}8\text{ cm} * 4{,}37\text{ cm} * \sin(\varphi + 34{,}08°)}{\sin \varphi}}{6}$$

$$\mathbf{V = \frac{51{,}13 * \sin(\varphi + 34{,}08°)}{\sin \varphi}}$$

**3.4**

Sinussatz im Dreieck FRC:

$$\frac{FC}{\sin \gamma} = \frac{FR}{\sin \varphi} \quad | \ {*}\sin \gamma$$

$$\mathbf{FC_{(\varphi)}} = \frac{FR * \sin \gamma}{\sin \varphi} = \frac{7{,}79\text{ cm} * \sin 34{,}08°}{\sin \varphi} = \mathbf{\frac{4{,}37\text{ cm}}{\sin \varphi}}$$

Im Dreieck QPC gilt:

$$\tan\alpha = \frac{FC}{\frac{QP}{2}} = \frac{\frac{4{,}37\ \text{cm}}{\sin\varphi}}{4{,}5\ \text{cm}} = \frac{0{,}97}{\sin\varphi}$$

**3.5**

Die Dreiecke $QC_2P$ und $QC_3P$ sind gleichschenklig rechtwinklig -->

$\alpha = 90°/2 = 45°$

$$\tan 45° = \frac{0{,}97}{\sin\varphi} \quad | \ {*\sin\varphi}$$

$\sin\varphi * 1 = 0{,}97$ --> **$\varphi = 75{,}93°$ oder** $180° - 75{,}93° =$ **$104{,}07°$**