Prüfungsaufgaben Aufgabe 5

Abschlussprüfung 2002

an den Realschulen in Bayern

Mathematik I **Aufgabengruppe B** **Aufgabe B 2**

B 2.0 Die Pfeile $\overrightarrow{PQ_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi + 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR_n} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 12\sin^2\varphi \end{pmatrix}$ mit $P(2|\ -1)$ spannen für $\varphi \in [20°;180°]$ Dreiecke PQ_nR_n auf.

B 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{PQ_1}$ und $\overrightarrow{PR_1}$ für $\varphi = 55°$ sowie $\overrightarrow{PQ_2}$ und $\overrightarrow{PR_2}$ für $\varphi = 135°$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann die zugehörigen Dreiecke PQ_1R_1 und PQ_2R_2 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 6$; $-2 \leqq y \leqq 12$

B 2.2 Zeigen Sie, dass sich die Koordinaten der Punkte R_n in Abhängigkeit von φ wie folgt darstellen lassen: $R_n(3\cos\varphi \,|\, 12\sin^2\varphi - 1)$.
Bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen p der Punkte R_n und zeichnen Sie p in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

B 2.3 Unter den Dreiecken PQ_nR_n gibt es zwei rechtwinklige Dreiecke PQ_3R_3 und PQ_4R_4 mit den Hypotenusen $[PR_3]$ bzw. $[PR_4]$.
Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörigen Winkelmaße φ jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

B 2.4 Im Dreieck PQ_5R_5 liegt der Mittelpunkt M_5 der Dreiecksseite $[Q_5R_5]$ auf der y-Achse.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $Q_n(2\cos\varphi + 3 \,|\, 2)$]

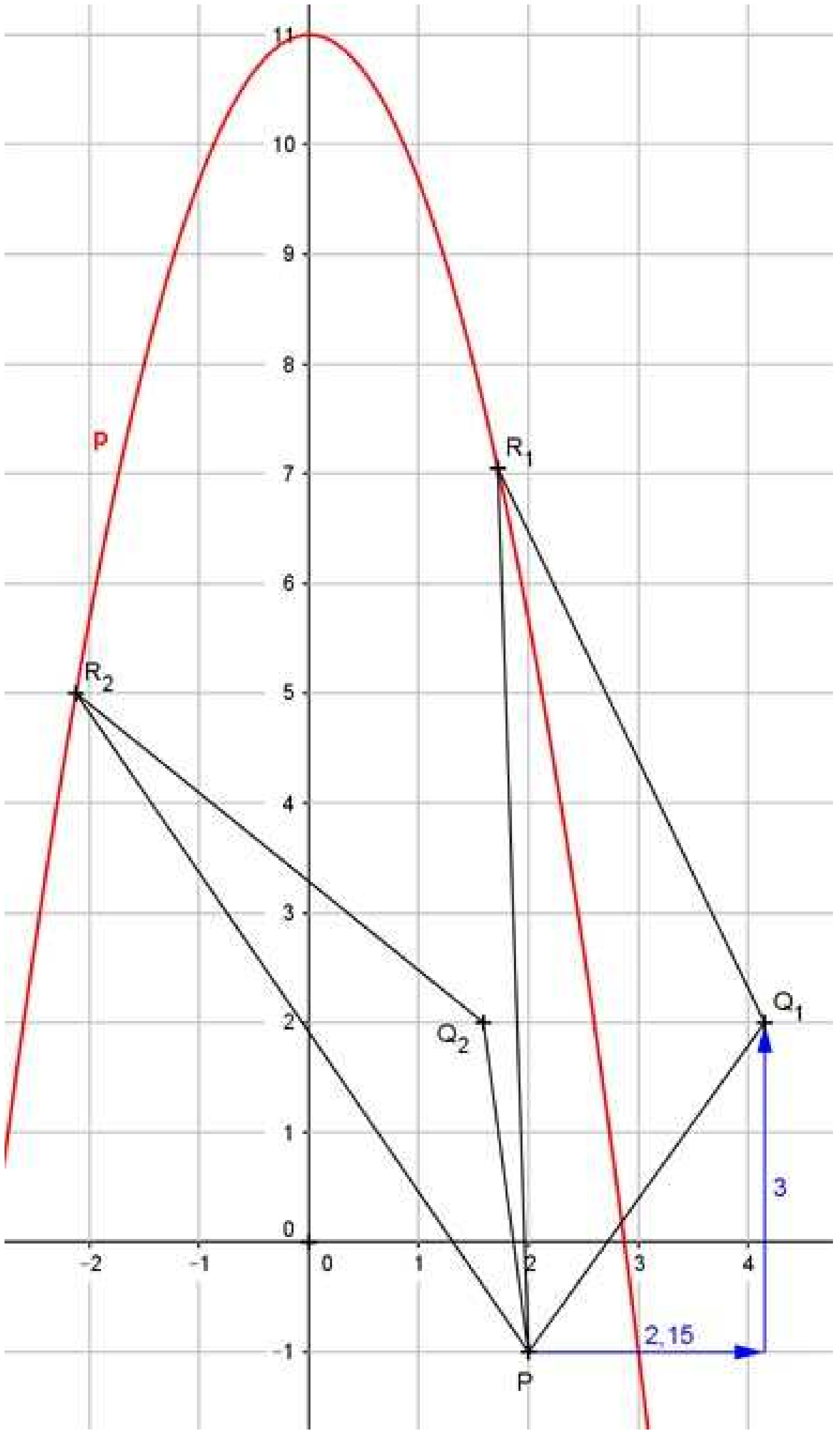
2.0 und 2.1

$$\overrightarrow{PQ_1} = \begin{bmatrix} 2\cos 55° + 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ_2} = \begin{bmatrix} 2\cos 135° + 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}41 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR_1} = \begin{bmatrix} 3\cos 55° - 2 \\ 12\sin^2 55° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}28 \\ 8{,}05 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR_2} = \begin{bmatrix} 3\cos 135° - 2 \\ 12\sin^2 135° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}12 \\ 6 \end{bmatrix}$$



2.2

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$$

$$\mathbf{\overrightarrow{OR}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 12\sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3\cos\varphi} \\ \mathbf{12\sin^2\varphi - 1} \end{bmatrix}$$

Die x'-Koordinate von p entspricht der x-Koordinate von R:

$x' = 3\cos\varphi \mid :3$

$$\cos\varphi = \frac{x'}{3}$$

In die y-Koordinate von R eingesetzt:

$$y' = 12\sin^2\varphi - 1 = 12(1 - \cos^2\varphi) - 1$$

$$y' = 12\left(1 - \left(\frac{x'}{3}\right)^2\right) - 1$$

$$\mathbf{y' =} 12 - \frac{12x'}{9} - 1 = \mathbf{-\frac{4}{3}x' + 11}$$

2.3

Ist $\overrightarrow{PR}$ die Hypotenuse, dann stehen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ senkrecht aufeinander.

Es gilt $\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{QR} = 0$ (Drehsinn beachten)

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cos\varphi + 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi + 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 3\cos\varphi \\ 12\sin^2\varphi - 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\cos\varphi + 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - 3 \\ 12\sin^2\varphi - 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\cos\varphi + 1 \\ 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\varphi - 3 \\ 12\sin^2\varphi - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(2\cos\varphi + 1) * (\cos\varphi - 3) + 3 * (12\sin^2\varphi - 3) = 0$$

$$2\cos^2\varphi - 5\cos\varphi - 3 + 3 * (12 * (1 - \cos^2\varphi) - 3) = 0$$

$$2\cos^2\varphi - 5\cos\varphi - 3 + 3 * (12 - 12\cos^2\varphi - 3) = 0$$

$$2\cos^2\varphi - 5\cos\varphi - 3 + 36 - 36\cos^2\varphi - 9 = 0$$

$$-34\cos^2\varphi - 5\cos\varphi + 24 = 0 \mid * (-1)$$

$$34\cos^2\varphi + 5\cos\varphi - 24 = 0 \mid * (-1)$$

A, B, C - Formel:

A = 34, B = 5, C = - 24

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-(4*34*(-24))}}{2*34} = \frac{-5 \pm \sqrt{3289}}{68}$$

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{-5 \pm 57{,}35}{68}$$

$\cos \varphi_1 = 0{,}7699$ --> $\boldsymbol{\varphi_1 = 39{,}66°}$ (oder $360° - 39{,}66° = 320{,}34°$)

$\cos \varphi_2 = -0{,}9169$ --> $\boldsymbol{\varphi_2 = 156{,}48°}$ (oder $360° - 156{,}46° = 203{,}52°$)

2.4

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + 0{,}5 * \overrightarrow{QR}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi + 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0{,}5 * \begin{bmatrix} \cos\varphi - 3 \\ 12\sin^2\varphi - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5\cos\varphi + 1{,}5 \\ 6\sin^2\varphi + 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Für Punkte auf der y-Achse gilt: $x = 0$

$2{,}5 \cos \varphi + 1{,}5$ ist die x - Koordinate des Punktes M:

$2{,}5 \cos \varphi + 1{,}5 = 0 \mid -1{,}5$

$2{,}5 \cos \varphi = -1{,}5 \mid :2{,}5$

$\cos \varphi = -0{,}6$ --> $\boldsymbol{\varphi = 126{,}87°}$ oder ($360° - 126{,}87° = 233{,}13°$)