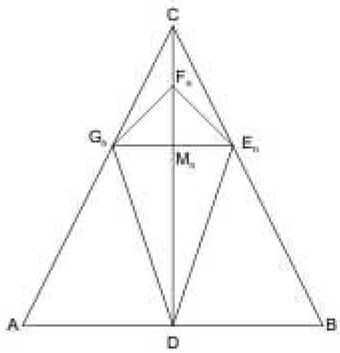
Prüfungsaufgaben Aufgabe 51

Prüfungsdauer: 150 Minuten	**Abschlussprüfung 2004** an den Realschulen in Bayern	**R4/R6**

Mathematik II | **Aufgabengruppe B** | **Aufgabe B 3**

B 3.0 Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis [AB] und der zur Basis gehörenden Höhe [CD]. Der Punkt D legt zusammen mit Punkten $E_n \in [BC]$, $F_n \in [CD]$ und $G_n \in [AC]$ Drachenvierecke $DE_nF_nG_n$ fest, deren Diagonalen $[DF_n]$ und $[E_nG_n]$ sich im Punkt M_n schneiden.



Es gilt: $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{CD} = 10$ cm, $\overline{F_nM_n} = 2$ cm und $\overline{DM_n}(x) = x$ cm mit $0 < x \leqq 8;\ x \in \mathbb{R}$

B 3.1 Zeichnen Sie das Dreieck ABC und das Drachenviereck $DE_1F_1G_1$ für $x = 4$ mit der gemeinsamen Symmetrieachse CD.
Bestimmen Sie sodann die Länge der Diagonalen $[E_nG_n]$ in Abhängigkeit von x.
[Teilergebnis: $\overline{E_nG_n}(x) = (10 - x)$ cm] 3 P

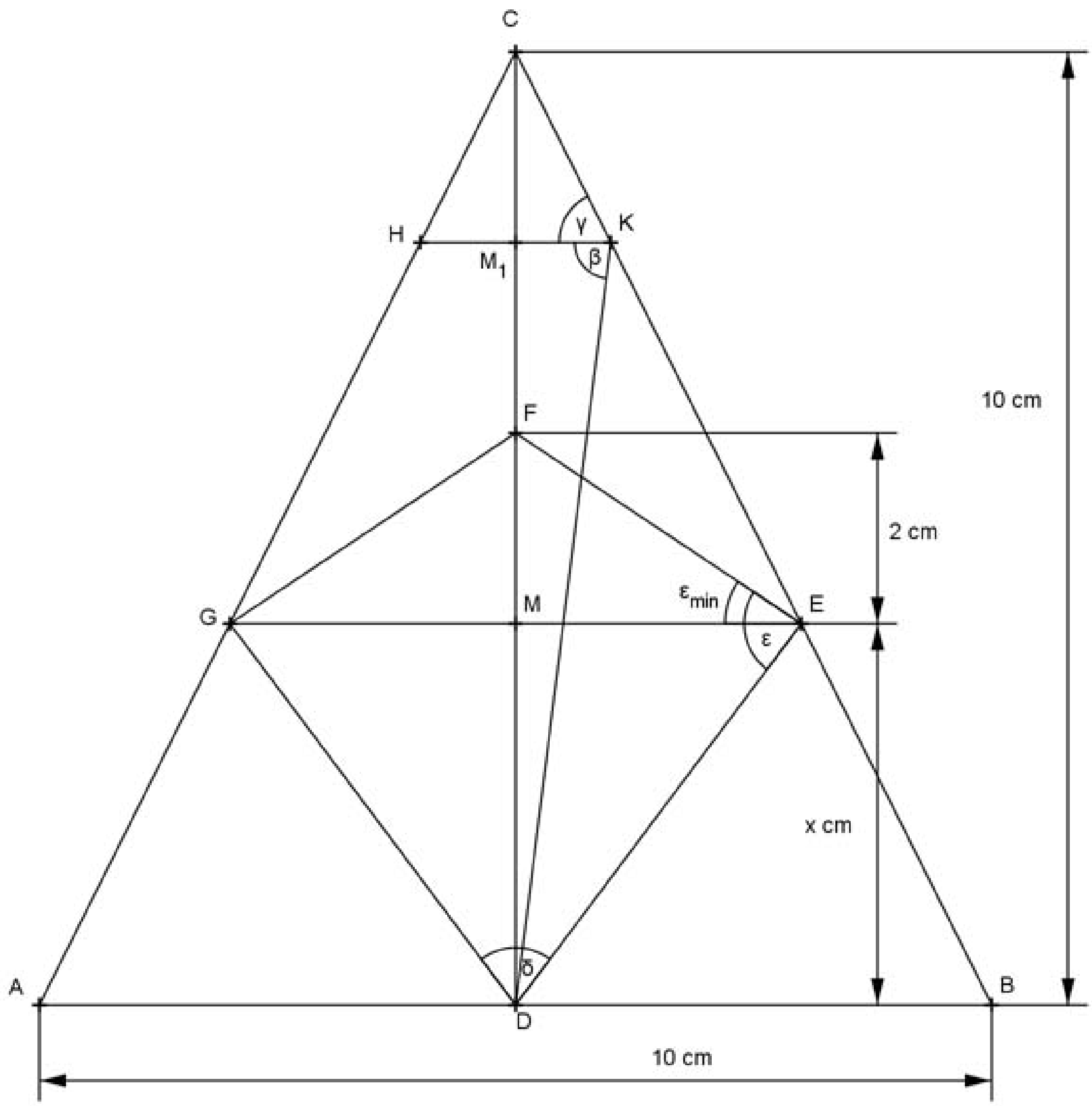
B 3.2 Das Dreieck ABC und die Drachenvierecke $DE_nF_nG_n$ rotieren um die gemeinsame Symmetrieachse CD. Dadurch entstehen ein Kegel mit dem Radius [AD] und Doppelkegel mit dem Radius $[E_nM_n]$.
Berechnen Sie für $x = 4$ den prozentualen Anteil des Volumens des Doppelkegels am Volumen des Kegels. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 3 P

B 3.3 Ein zweiter Doppelkegel besitzt den Öffnungswinkel E_2DG_2 mit dem Maß $\delta = 116°$.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 2 P

B 3.4 Bei einem dritten Doppelkegel sind die Mantellinien $[DE_3]$ und $[E_3F_3]$ gleich lang.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A_O der Oberfläche dieses Doppelkegels. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 4 P

B 3.5 Die Mantellinien $[DE_n]$ und $[E_nF_n]$ schließen Winkel F_nE_nD mit dem Maß ε ein.
Bestimmen Sie durch Rechnung das Intervall für das Maß ε. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 4 P

3.0, 3.1



3.1

Strahlensatz:

MC = 10 - x

$$\frac{AB}{DC} = \frac{EG}{MC} \quad | * MC$$

$$\color{red}{\mathbf{EG_{(x)} =}} \frac{AB * MC}{DC} = \frac{10\text{ cm} * (10 - x)\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \color{red}{\mathbf{10 - x\text{ cm}}}$$

3.2

$$V_K = \frac{\pi * DA^2 * DC}{3} = \frac{\pi * 5^2\ cm^2 * 10\ cm}{3} = 261{,}67\ cm^3$$

$$ME = EG/2 = \frac{10 - 4}{2} = 3\ cm$$

$DF = 4\ cm + 2\ cm = 6\ cm$

$$V_{DK} = \frac{\pi * ME^2 * DF}{3} = \frac{\pi * 3^2 * 6}{3}\ cm^3 = 56{,}52\ cm^3$$

Verhältnisgleichung:

$261{,}67\ cm^3 : 100\% = 56{,}52\ cm^3 : p\%$

$261{,}67 * p = 56{,}52 * 100 \mid :261{,}67$

$$\mathbf{p =} \frac{56{,}52 * 100}{261{,}67} = \mathbf{21{,}6\%}$$

3.3

Im Dreieck GDM gilt:

Winkel GDM = 116°/2 = 58°

$$GM = EG/2 = \frac{10 - x}{2}$$

$$\tan 58° = \frac{GM}{DM} = \frac{\frac{10 - x}{2}}{x} = \frac{10 - x}{2x} \mid * 2x$$

$1{,}6 * 2x = 10 - x$

$3{,}2 * x = 10 - x \mid +x$

$4{,}2 * x = 10 \mid :4{,}2$

x = 2,38 cm

3.4

Wenn EF = DE, dann muss DM = Grundkreisradius des Doppelkegels =

2 cm sein.

Oberfläche = 2 * Mantelfläche

$A_o = 2 \cdot \pi \cdot GM \cdot GF$

Strahlensatz:

$$\frac{GE}{AB} = \frac{SM}{DS} \quad | \cdot AB$$

$SM = DS - DM = 10\ cm - 2\ cm = 8\ cm$

$$GE = \frac{SM \cdot AB}{DS} = \frac{8\ cm \cdot 10\ cm}{10\ cm} = 8\ cm$$

$GM = GE/2 = 8\ cm/2 = 4\ cm$

Satz von Pythagoras im Dreieck MEF:

$GF^2 = GM^2 + MF^2 = 4^2\ cm^2 + 2^2\ cm^2 = 20\ cm^2 \quad |\sqrt{}$

$GF = 4{,}47\ cm$

$A_o =$ $2 \cdot \pi \cdot 4\ cm \cdot 4{,}47\ cm =$ **$112{,}29\ cm^2$**

3.5

Winkel ε entstehen dann, wenn F nicht mit C oder E nicht mit B zusammenfällt.

Fällt F mit C zusammen gilt:

Strahlensatz:

$$\frac{HK}{AB} = \frac{CM_1}{DC} \quad | \cdot AB$$

$CM_1 = MF = 2\ cm$

$$HK = \frac{CM_1 * AB}{AB} = \frac{2\text{ cm} * 10\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 2\text{ cm}$$

$KM_1 = HK/2 = 2\text{ cm}/2 = 1\text{ cm}$

Im Dreieck M_1KC gilt:

$$\tan \gamma = \frac{M_1C}{M_1K} = \frac{2\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 2 \text{ --> } \gamma = 63{,}43°$$

Im Dreieck M_1DK gilt:

$DM_1 = DC - M_1C = 10\text{ cm} - 2\text{ cm} = 8\text{ cm}$

$$\tan \beta = \frac{DM_1}{M_1K} = \frac{8\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 8 \text{ --> } \beta = 82{,}87°$$

$\varepsilon_{max} = \gamma + \beta = 63{,}43° + 82{,}87° = 146{,}3°$

Fällt E mit B zusammen gilt:

$$\tan \varepsilon_{min} = \frac{DF}{AB/2} = \frac{2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}4 \text{ --> } \varepsilon_{min} = 21{,}8°$$

$21{,}8° < \varepsilon < 146{,}3°$