Prüfungsaufgaben Aufgabe 57

Prüfungsdauer: 150 Minuten	**Abschlussprüfung 2004** an den Realschulen in Bayern	**R4/R6**

Mathematik II **Nachtermin** **Aufgabe D 3**

D 3.0 Im Drachenviereck ABCD schneiden sich die Diagonalen [AC] und [BD] im Punkt M. Das Drachenviereck ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über M liegt.
Es gilt: $\overline{AC} = 10\text{ cm}$, $\overline{MC} = 2{,}5\text{ cm}$, $\overline{BD} = 6\text{ cm}$ und $\overline{MS} = 9\text{ cm}$

D 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann das Maß α des Winkels MAS auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\alpha = 50{,}19°$] 3 P

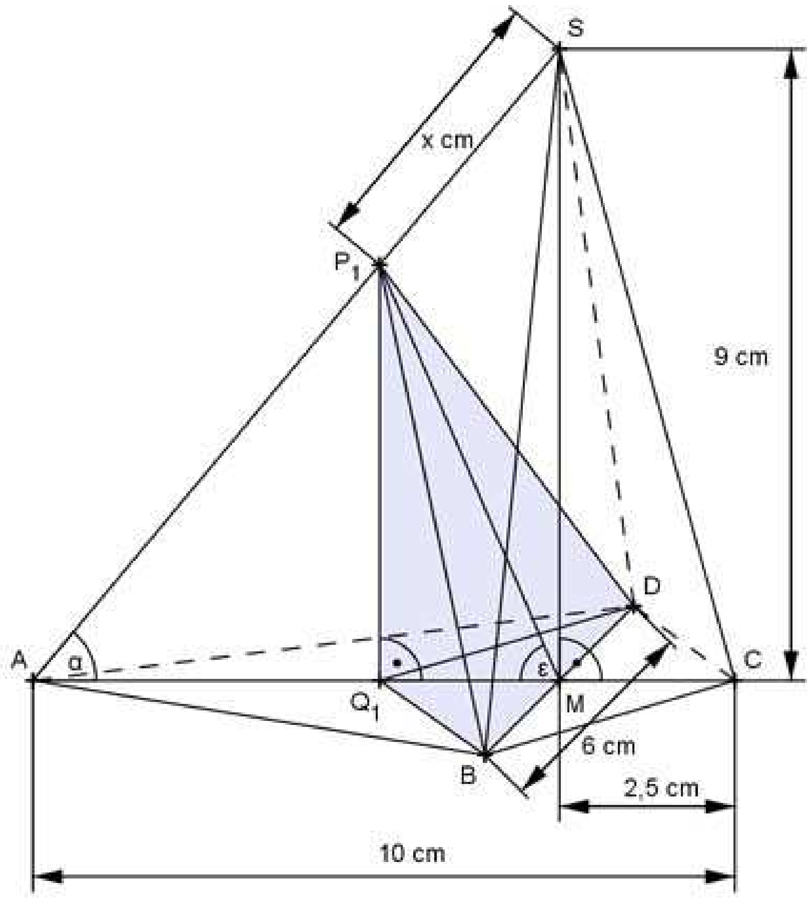
D 3.2 Die Punkte $P_n \in [AS]$ mit $\overline{P_nS} = x\text{ cm}$ sind die Spitzen von Pyramiden Q_nBDP_n, wobei die Punkte Q_n jeweils die Fußpunkte der Lote von P_n auf [AM] sind. Die Winkel P_nMA haben das Maß ε.
Zeichnen Sie die Pyramide Q_1BDP_1 mit $x = 4$ in das Schrägbild zu 3.1 ein und ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Pyramiden Q_nBDP_n gibt.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MP_1]$ und das Maß ε des Winkels P_1MA. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $\overline{AS} = 11{,}72\text{ cm}$; $\overline{MP_1} = 6{,}46\text{ cm}$] 4 P

D 3.3 Zeigen Sie, dass für das Volumen V(x) der Pyramiden Q_nBDP_n in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = (-0{,}49x^2 + 5{,}76x)\text{ cm}^3$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 4 P

D 3.4 Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide Q_1BDP_1 am Volumen der Pyramide ABCDS. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 3 P

D 3.5 Unter den Pyramiden Q_nBDP_n gibt es eine Pyramide Q_0BDP_0, bei der die Länge der Strecke $[MP_n]$ minimal ist.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $[MP_0]$ und den zugehörigen Wert für x. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 2 P

3.0 - 3.2



3.1

Im Dreieck AMS gilt:

AM = AC - CM = 10 cm - 2,5 cm = 7,5 cm

$$\tan \alpha = \frac{MS}{AM} = \frac{9\text{ cm}}{7,5\text{ cm}} = 1,2 \rightarrow \alpha = 50,19°$$

3.2

Es gibt so lange Pyramiden abhängig von x, solange P nicht mit A oder S zusammenfällt. -->

Im Dreieck AMS gilt:

$$\sin \alpha = \frac{MS}{AS} \quad | \cdot AS$$

$AS * \sin \alpha = MS \mid :\sin \alpha$

$$\mathbf{AS} = \frac{MS}{\sin \alpha} = \frac{9\text{ cm}}{\sin 50{,}19°} = \mathbf{11{,}72\text{ cm}}$$

$\mathbf{0 < x < 11{,}72}$

Kosinussatz im Dreieck AMP_1:

$AP1 = AC - 4\text{ cm} = 11{,}72\text{ cm} - 4\text{ cm} = 7{,}72\text{ cm}$

$MP_1^2 = AM^2 + AP_1^2 - 2 * AM * AP_1 * \cos \alpha$

$MP_1^2 = 7{,}5^2 + 7{,}72^2 - 2 * 7{,}5 * 7{,}72 * \cos 50{,}19°$

$MP_1^2 = 41{,}71 \mid \sqrt{}$

$\mathbf{MP_1 = 6{,}46\text{ cm}}$

Sinussatz:

$$\frac{MP_1}{\sin \alpha} = \frac{AP_1}{\sin \varepsilon}$$

Über Kreuz multipliziert:

$MP_1 * \sin \varepsilon = AP_1 * \sin \alpha \mid :MP_1$

$$\sin \varepsilon = \frac{AP_1 * \sin \alpha}{MP_1} = \frac{7{,}72\text{ cm} * \sin 50{,}19°}{6{,}46\text{ cm}} = 0{,}918 \dashrightarrow \mathbf{\varepsilon = 66{,}64°}$$

oder (180° - 66,64° = 113,36°)

3.3

$$V_{QBDP} = \frac{\frac{BC * MQ}{2}}{3} * PQ = \frac{BC * MQ * PQ}{6}$$

Im Dreieck AQP gilt:

$AP = AS - x$

$$\sin \alpha = \frac{QP}{AP} \quad | \cdot AP$$

$QP = \sin \alpha * AP = \sin 50{,}19° * (11{,}72 - x) = 0{,}7682 * (11{,}72 - x)$

$QP = 9 - 0{,}77x$ cm

$$\cos \alpha = \frac{AQ}{AP} \quad | \cdot AP$$

$AQ = AP * \cos \alpha = \cos 50{,}19° * (AS - x) = 0{,}64 * (11{,}72 - x)$

$AQ = 7{,}5 - 0{,}64x$

$QM = 7{,}5 - (7{,}5 - 0{,}64x) = 0{,}64x$ cm

$$\mathbf{V_{(x)}} = \frac{6 \text{ cm} * 0{,}64x * (9 - 0{,}77x)}{6} = \mathbf{5{,}76x - 0{,}49x^2 \text{ cm}^3}$$

3.4

$V_{(4)} = 5{,}76 * 4 - 0{,}49 * 4^2 = 15{,}2 \text{ cm}^3$

$$V_{ABCDS} = \frac{\frac{AC * BD}{2}}{3} * MS = \frac{AC * BD * MS}{6}$$

$$V_{ABCDS} = \frac{10 \text{ cm} * 6 \text{ cm} * 9 \text{ cm}}{6} = 90 \text{ cm}^3$$

Verhältnisgleichung:

$90 \text{ cm}^3 : 100\% = 15{,}2 \text{ cm}^3 : p\%$

$15{,}2 * 100 = 90 * p \quad | :90$

$$\mathbf{p} = \frac{15{,}2 * 100}{90} = \mathbf{16{,}89\%}$$

3.5

MP ist dann minimal, wenn sie senkrecht auf AS steht.

Im Dreieck AMP gilt:

$$\sin \alpha = \frac{MP}{AM} \quad | \; *AM$$

MP_0 = $\sin \alpha * AM = \sin 50{,}19° * 7{,}5$ cm = **5,76 cm**

$$\cos \alpha = \frac{AP}{AM} \quad | \; *AM$$

$AP = \cos \alpha * AM = \cos 50{,}19° * 7{,}5$ cm = 4,8 cm

x = AS - AP = 11,72 cm - 4,8 cm = **6,92 cm**