Prüfungsaufgaben Aufgabe 65

Prüfungsdauer: 150 Minuten	**Abschlussprüfung 2005** an den Realschulen in Bayern	**R4/R6**

Mathematik I **Nachtermin** **Aufgabe C 2**

C 2.0 Die Punkte $A(-1|5)$ und $B(-3|2,5)$ legen zusammen mit den Pfeilen $\overrightarrow{BC_n} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\cos\varphi + 3 \\ -3\sin^2\varphi - 2,5 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in]0°;180°[$ Dreiecke ABC_n fest.

C 2.1 Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{BC_1}$ für $\varphi = 106,78°$ und $\overrightarrow{BC_2}$ für $\varphi = 54,74°$.
Zeichnen Sie sodann die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 4$; $-4 \leqq y \leqq 6$ 2 P

C 2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ.
Zeigen Sie sodann rechnerisch, dass sich die Gleichung des Trägergraphen p der Punkte C_n in der Form $y = \frac{1}{4}x^2 - 3$ darstellen lässt und zeichnen Sie den Trägergraphen p in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.
[Teilergebnis: $C_n(2\sqrt{3}\cos\varphi \mid -3\sin^2\varphi)$] 5 P

C 2.3 Unter den Dreiecken ABC_n gibt es ein gleichschenkliges Dreieck ABC_3 mit der Basis [AB].
Zeichnen Sie das Dreieck ABC_3 in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann den zugehörigen Wert von φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Geben Sie, auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, die Koordinaten des Punktes C_3 an. 4 P

C 2.4 Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt A der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von φ wie folgt darstellen lässt:
$A(\varphi) = (-3\cos^2\varphi + 2,5\sqrt{3}\cos\varphi + 9,25)$ FE 3 P

C 2.5 Unter den Dreiecken ABC_n besitzt das Dreieck ABC_0 den größten Flächeninhalt A_{max}.
Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A_{max} und den zugehörigen Wert von φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. 3 P

2.0, 2.1

Pfeil $\overrightarrow{BC_1}$:

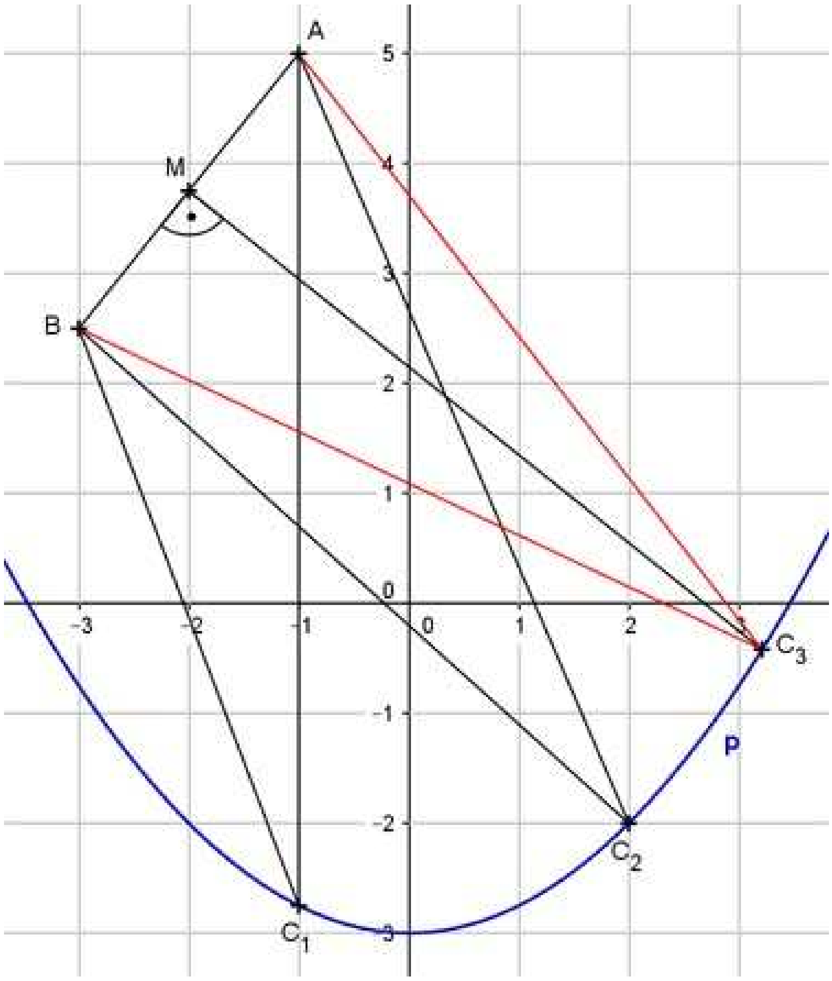
$2 * \sqrt{3} * \cos 106,78° + 3 = \mathbf{2}$

$- 3 * \sin^2 106{,}78° - 2{,}5 =$ **- 5,25**

Pfeil $\overrightarrow{BC_2}$:

$2 * \sqrt{3} * \cos 54{,}74° + 3 =$ **5**

$- 3 * \sin^2 54{,}74° - 2{,}5 =$ **- 4,5**



2.2

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi + 3 \\ -3 * \sin^2 \varphi - 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi \\ -3 * \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

Trägergraph p:

Die x'-Koordinate von p entspricht der x-Koordinate von C.

$x' = 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi \;|:2 * \sqrt{3}$

x'

$$\cos \varphi = \frac{}{2 * \sqrt{3}}$$

In die y-Koordinate von C eingesetzt:

$$- 3 * (1 - \cos^2 \varphi) = - 3 * \left(1 - \left(\frac{x'}{2 * \sqrt{3}}\right)^2\right.$$

$$- 3 * \left(1 - \frac{x'^2}{12}\right) = \mathbf{- 3 + \frac{x'^2}{4} = p_{(x)}}$$

2.3

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + 0,5 * \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2,5 \end{bmatrix} + 0,5 * \begin{bmatrix} 2 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3,75 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi \\ - 3 * \sin^2 \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi + 2 \\ - 3 * \sin^2 \varphi - 3,75 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BM} = 0,5 * \overrightarrow{BA} = 0,5 * \begin{bmatrix} 2 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{BM}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{MC}$, dewegen ist $\overrightarrow{MC} * \overrightarrow{BM} = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi + 2 \\ - 3 * \sin^2 \varphi - 3,75 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1,25 \end{bmatrix} = 0$$

$$2 * \sqrt{3} * \cos \varphi + 2 + 1,25 * (- 3 * \sin^2 \varphi - 3,75) = 0$$

$$2 * \sqrt{3} * \cos \varphi + 2 - 3,75 * \sin^2 \varphi - 4,69) = 0$$

$$2 * \sqrt{3} * \cos \varphi - 3,75 * (1 - \cos^2 \varphi) - 2,69) = 0$$

$$- 3,75 + 3,75 * \cos^2 \varphi + 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi - 2,69) = 0$$

$$3,75 * \cos^2 \varphi + 2 * \sqrt{3} * \cos \varphi - 6,44) = 0$$

A, B, C - Formel:

$A = 3,75$, $B = 2 * \sqrt{3}$, $C = - 6,44$

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{-2 * \sqrt{3} \pm \sqrt{(2*\sqrt{3})^2 - 4*3{,}75*(-6{,}44)}}{2 * 3{,}75} = \frac{-2 * \sqrt{3} \pm \sqrt{108{,}6}}{7{,}5}$$

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{-2 * \sqrt{3} \pm 10{,}42}{7{,}5}$$

$\cos\varphi_1 = 0{,}9275$ --> **$\varphi_1 = 21{,}95°$** (oder $360° - 21{,}95° = 338{,}05°$)

Koordinaten von C_3:

$C_3(2 * \sqrt{3} * \cos 21{,}95° | - 3 * \sin^2 21{,}95°)$

$C_3(3{,}21 | - 0{,}42)$

2.4

$$A_{(\varphi)} = 0{,}5 * \begin{vmatrix} 2 * \sqrt{3} * \cos\varphi + 3 & 2 \\ - 3 * \sin^2\varphi - 2{,}5 & 2{,}5 \end{vmatrix}$$

$A_{(\varphi)} = 0{,}5 * (2{,}5 * (2 * \sqrt{3} * \cos\varphi + 3) - 2 *(- 3 * \sin^2\varphi - 2{,}5))$

$A_{(\varphi)} = 0{,}5 * (8{,}66 * \cos\varphi + 7{,}5 + 6 * (1 - \cos^2\varphi) + 5)$

$A_{(\varphi)} = - 3 * \cos^2\varphi + 4{,}33 * \cos\varphi + 9{,}25$ FE

2.5

Scheitelpunkt von $A_{(\varphi)}$:

$A_{(\varphi)} = - 3 * \cos^2\varphi + 4{,}33 * \cos\varphi + 9{,}25 \mid :(-3)$

$$\frac{A_{(\varphi)}}{-3} = \cos^2\varphi - 1{,}44 * \cos\varphi - 3{,}08$$

$$\frac{A_{(\varphi)}}{-3} = (\cos\varphi - 0{,}72)^2 - 0{,}52 - 3{,}08 \mid *(-3)$$

$A_{(\varphi)} = - 3 * (\cos\varphi - 0{,}72)^2 + 10{,}8$

$A_{(\varphi)}(0{,}72 | 10{,}8)$ -->

$\cos\varphi = 0{,}72$ --> **$\varphi = 43{,}95°$** (oder $360° - 43{,}95° = 316{,}05°$)

A_{max} = 10,8 FE