Prüfungsdauer: 150 Minuten

Abschlussprüfung 2005

an den **vierstufigen** Realschulen in Bayern

R4

Mathematik II **Aufgabengruppe C** **Aufgabe C 3**

C 3.0 Das gleichschenklige Trapez ABCD mit den Grundseiten [AB] und [CD] ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt E der Seite [AB]. F ist der Mittelpunkt der Seite [CD].
Es gilt: $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{CD} = 8$ cm, $\overline{EF} = 6$ cm, $\overline{ES} = 7$ cm

C 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Symmetrieachse EF der Grundfläche ABCD auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$ 2 P

C 3.2 Berechnen Sie das Maß ε des Winkels SFE, den die Seitenfläche CDS mit der Grundfläche einschließt, und die Länge der Strecke [FS] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Ergebnisse: $\varepsilon = 49{,}40°$; $\overline{FS} = 9{,}22$ cm] 2 P

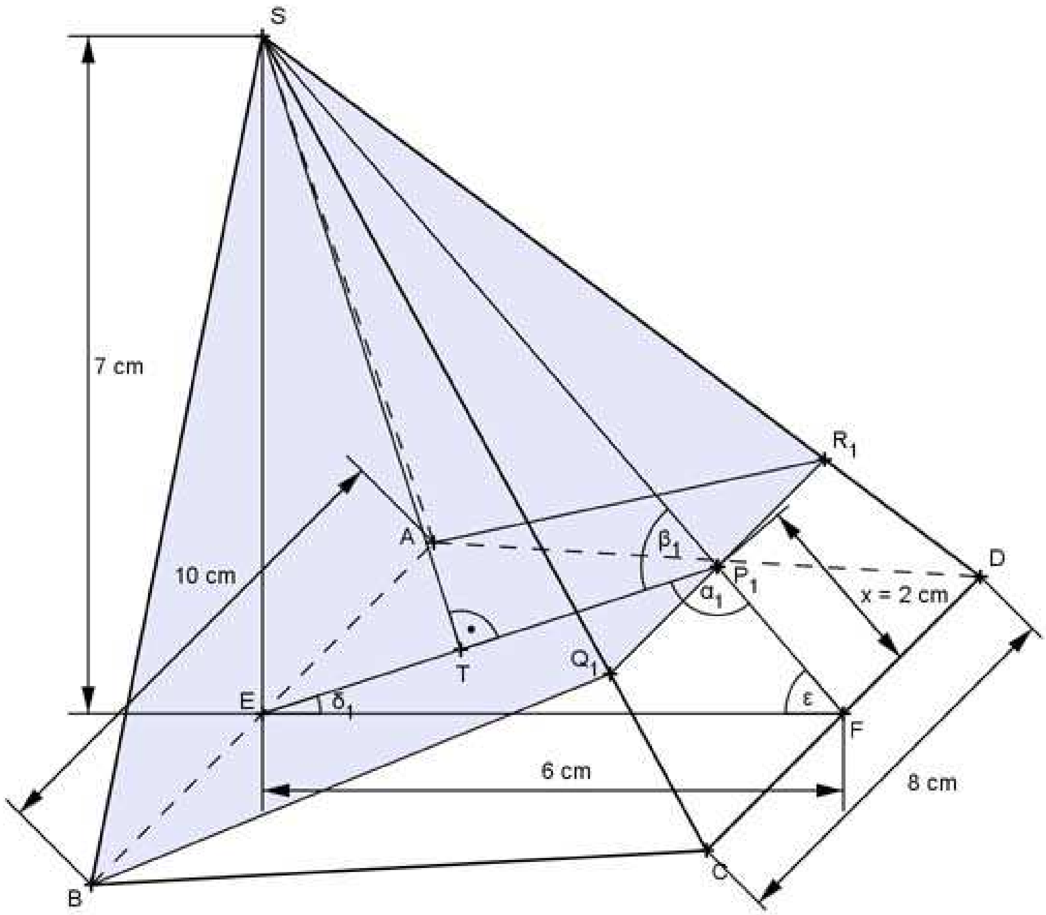
C 3.3 Auf der Strecke [FS] liegen Punkte P_n mit $\overline{FP_n} = x$ cm und $x < 9{,}22$; $x \in \mathbb{R}_0^+$. Parallelen zur Seite [CD] durch die Punkte P_n schneiden die Seitenkanten [CS] in Q_n und [DS] in R_n. Die Punkte Q_n und R_n sind zusammen mit A und B Eckpunkte von Trapezen ABQ_nR_n.
Zeichnen Sie das Trapez ABQ_1R_1 für x = 2 in das Schrägbild zu 3.1 ein.
Berechnen Sie sodann das Maß δ_1 des Winkels FEP_1 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\delta_1 = 17{,}90°$] 3 P

C 3.4 Berechnen Sie die Länge der Höhe $[EP_n]$ der Trapeze ABQ_nR_n in Abhängigkeit von x.
Ermitteln Sie sodann die kleinste Länge $\overline{EP_n}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\overline{EP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 7{,}81x + 36}$ cm] 3 P

C 3.5 Zeigen Sie, dass für die Längen der Strecken $[Q_nR_n]$ in Abhängigkeit von x gilt: $\overline{Q_nR_n}(x) = (8 - 0{,}87x)$ cm.
Berechnen Sie sodann auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, für welche Belegung von x gilt: $\overline{Q_nR_n}(x) = 3$ cm. 3 P

C 3.6 Das Trapez ABQ_1R_1 ist die Grundfläche einer zweiten Pyramide ABQ_1R_1S.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 3 P

3.0, 3.1, 3.3



3.2

Im Dreieck EFS gilt:

$$\tan \varepsilon = \frac{ES}{EF} = \frac{7\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 1{,}1667 \text{ ---> } \boldsymbol{\varepsilon = 49{,}4°}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck EFS:

$FS^2 = ES^2 + EF^2$

$FS^2 = 7^2\text{ cm}^2 + 6^2\text{ cm}^2 = 85\text{ cm}^2 \;|\sqrt{\ }$

$FS = 9{,}22$ cm

3.3

Kosinussatz im Dreieck EFP_1:

$EP_1^2 = EF^2 + FP_1^2 - 2 * EF * FP_1 * \cos \varepsilon$

$EP_1^2 = 6^2\text{ cm}^2 + 2^2\text{ cm}^2 - 2 * 6\text{ cm} * 2\text{ cm} * \cos 49{,}4°$

$EP_1^2 = 24,38\ cm^2 |\ \sqrt{}$

$EP_1 = 4,94\ cm$

Sinussatz:

$$\frac{FP_1}{\sin \delta_1} = \frac{EP_1}{\sin \varepsilon}$$

Über Kreuz multpliziert:

$FP_1 * \sin \varepsilon = EP_1 * \sin \delta_1\ |\ :EP_1$

$$\sin \delta_1 = \frac{FP_1 * \sin \varepsilon}{EP_1} = \frac{2\ cm * \sin 49,4°}{4,94\ cm} = 0,3074 \text{ --> } \boldsymbol{\delta_1 = 17,9°}$$

3.4

Kosinussatz im Dreieck EFP:

$EP^2 = EF^2 + FP^2 - 2 * EF * FP * \cos \varepsilon$

$EP^2 = 6^2\ cm^2 + x^2\ cm^2 - 2 * 6\ cm * x\ cm * \cos 49,4°$

$EP^2 = x^2 - 7,81x + 36\ cm^2 |\ \sqrt{}$

$EP_{(x)} = \sqrt{x^2 - 7,81x + 36}\ cm$

Kleinste Länge bedeutet y-Koordinate des Scheitelpunktes von:

$EP^2 = x^2 - 7,81x + 36\ cm^2$

$EP^2 = (x - 3,91)^2 - 15,29 + 36\ cm^2$

$EP^2 = (x - 3,91)^2 + 20,71\ cm^2$

Für $x = 3,91$ ist $\boldsymbol{EP_0} = \sqrt{20,71}\ cm^2 = \mathbf{4,55\ cm}$

3.5

Strahlensatz:

$$\frac{QR}{CD} = \frac{FS - x}{FS}\ |\ * CD$$

$$\boldsymbol{QR_{(x)}} = \frac{(FS - x) * CD}{FS} = \frac{(9,22 - x) * 8}{9,22\ cm} = \mathbf{8 - 0,87x}$$

$3 = 8 - 0{,}87x \mid +0{,}87x$

$3 + 0{,}87x = 8 \mid -3$

$0{,}87x = 5 \mid :0{,}87$

$\mathbf{x = 5{,}75}$

3.6

$\alpha_1 = 180° - \delta_1 - \varepsilon = 180° - 17{,}9° - 49{,}4° = 112{,}7°$

$\beta_1 = 180° - \alpha_1 = 180° - 112{,}7° = 67{,}3°$

$QR_{(2)} = 8 - 0{,}87 * 2 = 6{,}26 \text{ cm}$

Im Dreieck STP_1 gilt:

$P_1S = FS - x = 9{,}22 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 7{,}22 \text{ cm}$

$$\sin \beta_1 = \frac{ST}{P_1S} \mid *P_1S$$

$ST = \sin \beta_1 * P_1S = \sin 67{,}3° * 7{,}22 \text{ cm} = 6{,}66 \text{ cm}$

$$V_{ABQ1P1S} = \frac{\frac{AB + QR_{(2)}}{2} * EP_1 * ST}{3} = \frac{(AB + BD) * EP_1 * ST}{6}$$

$$\mathbf{V_{ABQ1P1S}} = \frac{(10 \text{ cm} + 6{,}26 \text{ cm}) * 4{,}94 \text{ cm} * 6{,}66 \text{ cm}}{6} = \mathbf{89{,}16 \text{ cm}^3}$$