Prüfungsaufgaben Aufgabe 82

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Abschlussprüfung 2006

an den Realschulen in Bayern

R4/R6

Mathematik I **Wahlteil – Haupttermin** **Aufgabe B 2**

B 2.0 Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix}$ mit $A(2|1)$ spannen für $\varphi \in [0°;180°]$ Dreiecke AB_nC_n auf.

B 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 30°$, $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 90°$ und $\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{AC_3}$ für $\varphi = 150°$ jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann die Dreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 4$; $-1 \leqq y \leqq 5$ 3 P

B 2.2 Die Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ schließen einen Winkel mit dem Maß α ein.
Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. 2 P

B 2.3 Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $C_n(2\cos\varphi - 1 | \sin^2\varphi + 1)$] 1 P

B 2.4 Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen p der Punkte C_n und zeichnen Sie den Trägergraph p in das Koordinatensystem zu 2.1 ein. 4 P

B 2.5 Berechnen Sie den Wert von φ, sodass der Punkt C_4 auf der y-Achse liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_4. 2 P

B 2.6 Im rechtwinkligen Dreieck AB_5C_5 ist die Strecke $[B_5C_5]$ die Hypotenuse.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von φ. 5 P

2.0 - 2.1

$\overrightarrow{AB_1} = \begin{bmatrix} 3 * \cos 30° - 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 3 \end{bmatrix}$

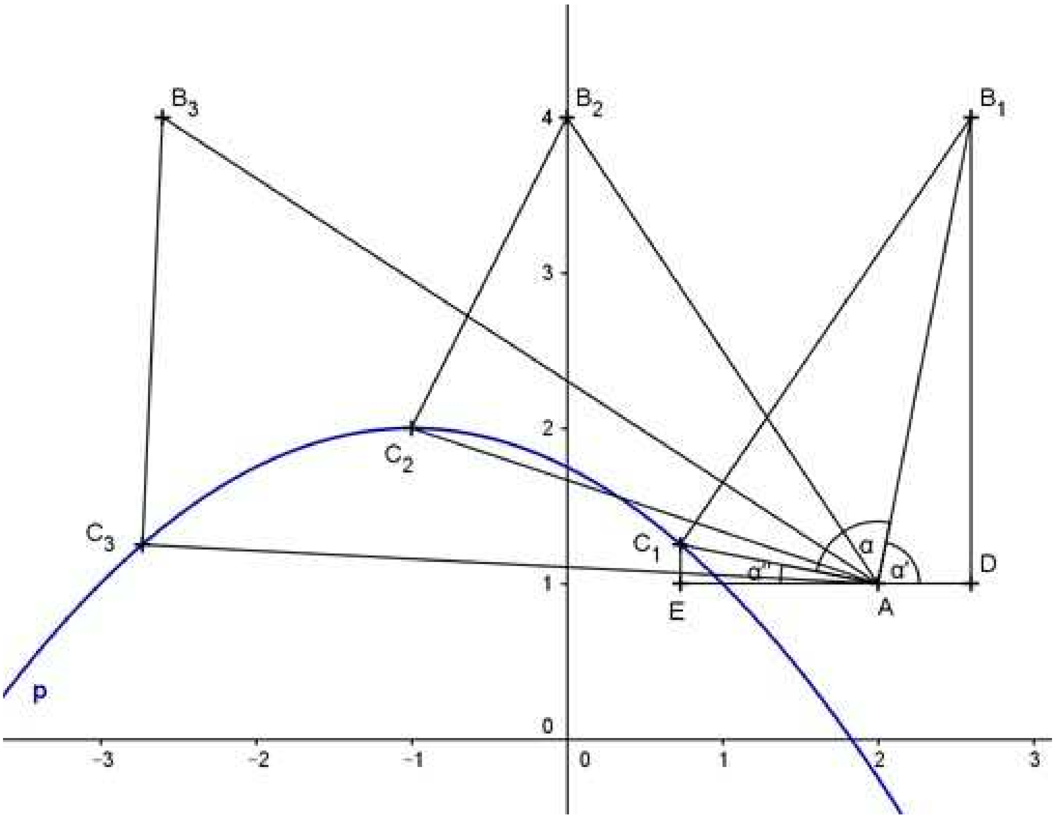
$\overrightarrow{AB_2} = \begin{bmatrix} 3 * \cos 90° - 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB_3} = \begin{bmatrix} 3 * \cos 150° - 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AC_1} = \begin{bmatrix} 2 * \cos 30° - 3 \\ \sin^2 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}27 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AC_2} = \begin{bmatrix} 2 * \cos 90° - 3 \\ \sin^2 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AC_3} = \begin{bmatrix} 2 * \cos 150° - 3 \\ \sin^2 150° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}73 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$



2.2

Im Dreieck ADB_1 gilt:

$AD = x_{AB1} = 0{,}6$

$DB_1 = y_{AB1} = 3$

$\tan \alpha' = \frac{DB_1}{AD} = \frac{3}{0{,}6} = 5 \rightarrow \alpha' = 78{,}69°$

Im Dreieck AEC_1 gilt:

$AE = |x_{AC1}| = 1,27$

$EC_1 = y_{AC1} = 0,25$

$$\tan \alpha'' = \frac{EC_1}{AE} = \frac{0,25}{1,27} = 0,1969 \rightarrow \alpha'' = 11,14°$$

α **=** $180° - \alpha' - \alpha'' = 180° - 78,69° - 11,14° =$ **90,17°**

2.3

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi - 1 \\ 1 + \sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

2.4

Die x-Koordinate von C entspricht der x'-Koordinate von p:

$x' = 2 * \cos \varphi - 1 \ |+1$

$x' + 1 = 2 * \cos \varphi \ | :2$

$$\cos \varphi = \frac{x' + 1}{2}$$

In die y-Koordinate von C eingesetzt:

$$y' = 1 + \sin^2 \varphi = 1 + (1 - \cos^2 \varphi) = 1 + 1 - \left(\frac{x' + 1}{2}\right)^2$$

$$y' = 1 + \frac{x'^2 + 2x' + 1}{4} = 2 - 0,25 * (x'^2 + 2x' + 1)$$

$y' = 2 - 0,25x'^2 - 0,5x' - 0,25$

$\mathbf{y' = - 0,25x'^2 - 0,5x' + 1,75}$

2.5

C_4 auf der y-Achse bedeutet $x = 0$

$2 * \cos \varphi - 1 = 0 \ |+1$

$2 * \cos \varphi = 1 \ |:2$

$\cos \varphi = 0,5 \rightarrow$ $\mathbf{\varphi = 60°}$

$C_4(0|\ 1 + \sin^2 60° = 1{,}75)$

$C_4(0|1{,}75)$

2.6

Ist BC die Hypotenuse, dann müssen die Vektoren AB und AC senkrecht aufeinander stehen.

$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = 0$

$$\begin{bmatrix} 3\cos\varphi \\ 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{bmatrix} = 0$$

$(3 * \cos\varphi - 2) * (2 * \cos\varphi - 3) + 3 * \sin^2\varphi = 0$

$6 * \cos^2\varphi - 13 * \cos\varphi + 6 + 3 * (1 - \cos^2\varphi) = 0$

$6 * \cos^2\varphi - 13 * \cos\varphi + 6 + 3 - 3 * \cos^2\varphi = 0$

$3 * \cos^2\varphi - 13 * \cos\varphi + 9 = 0$

A,B,C - Formel:

A = 3, B = - 13, C = 9

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4*3*9}}{2*3} = \frac{13 \pm \sqrt{61}}{6}$$

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{13 \pm 7{,}81}{6}$$

$\cos\varphi_1 = 3{,}47 > 1$, keine Lösung

$\cos\varphi_2 = 0{,}865$ --> **$\varphi_2 = 30{,}12°$** (oder $360° - 30{,}12° = 329{,}88°$)