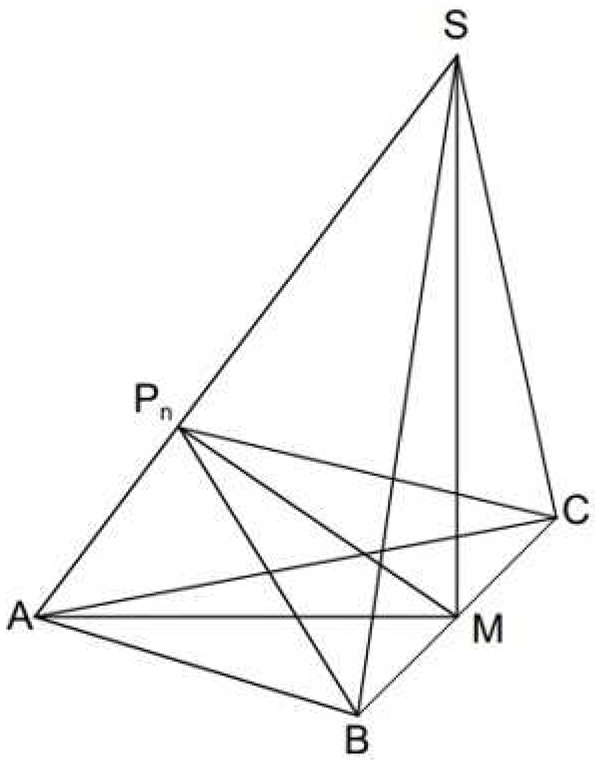
Prüfungsaufgaben Aufgabe 83a

Mathematik I | **Pflichtteil - Nachtermin** | **Aufgabe P 2**

P 2.0 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$ und der Höhe $\overline{AM} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche der Pyramide ABCS. Die Spitze S ist senkrecht über M und es gilt: $\overline{MS} = 8\,\text{cm}$.



P 2.1 Berechnen Sie das Maß α des Winkels MAS.
[Ergebnis: $\alpha = 53{,}13°$] 1 P

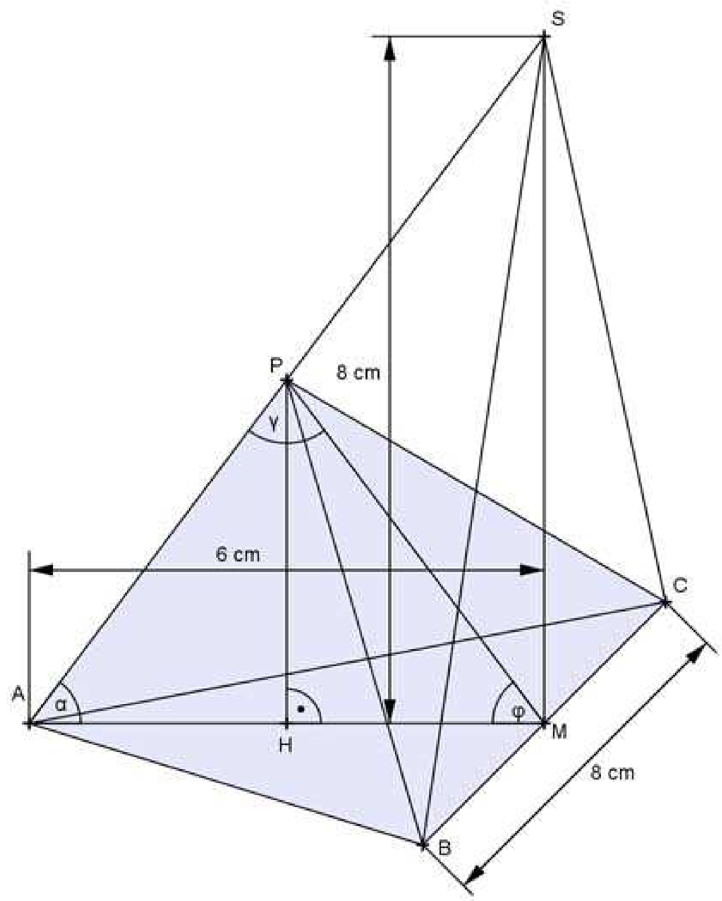
P 2.2 Punkte P_n auf der Kante [AS] sind Spitzen von Pyramiden $ABCP_n$. Der Winkel P_nMA hat das Maß φ.
Zeigen Sie, dass für die Höhe h der Pyramiden $ABCP_n$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$h(\varphi) = \dfrac{4{,}80 \cdot \sin\varphi}{\sin(53{,}13° + \varphi)}\,\text{cm}$. 3 P

P 2.3 Das Volumen V_1 der Pyramide $ABCP_1$ hat ein Drittel des Volumens V der Pyramide ABCS.
Bestimmen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. 5 P

2.1

Im Dreieck MAS gilt:

$$\tan \alpha = \frac{8\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} = 1{,}3333 \;\text{--->}\; \boldsymbol{\alpha = 53{,}13°}$$



2.2

$\gamma = 180° - (\alpha + \varphi) = 180° - (53{,}13° + \varphi)$

$\sin \gamma = \sin 180° - (\alpha + \varphi) = \sin (\alpha + \varphi)$

Sinussatz im Dreieck AMP:

$$\frac{AM}{\sin \gamma} = \frac{MP}{\sin \varphi} \quad | \cdot \sin \varphi$$

$$MP = \frac{AM \cdot \sin \varphi}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck AHP gilt:

$$\sin \alpha = \frac{HP}{MP} \quad | \cdot MP$$

$HP = MP \cdot \sin \alpha$

$$HP = \frac{AM * \sin \varphi}{\sin \gamma} * \sin \alpha = \frac{6\ cm * \sin \varphi * \sin 53{,}13°}{\sin (180° - (53{,}13° + \varphi))}$$

$$HP = \mathbf{h_{(\varphi)} = \frac{4{,}8\ cm * \sin \varphi}{\sin (53{,}13° + \varphi)}\ cm}$$

2.3

$$V_{ABCS} = \frac{\frac{BC * AM}{2} * MS}{3} = \frac{BC * AM * MS}{6} = \frac{8\ cm * 6\ cm * 8\ cm}{6}$$

$$V_{ABCS} = 64\ cm^3$$

$$\frac{64}{3} = \frac{\frac{BC * AM}{2} * h}{3} = \frac{BC * AM * h}{6} \quad | *6$$

$$128 = \frac{8\ cm * 6\ cm * 4{,}8\ cm * \sin \varphi}{\sin (53{,}13° + \varphi)} = \frac{230{,}4 * \sin \varphi}{\sin (53{,}13° + \varphi)}\ cm^3 \quad |:230{,}4$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin (53{,}13° + \varphi)} = 0{,}5555 \quad | * \sin (53{,}13° + \varphi)$$

$\sin \varphi = 0{,}5556 * \sin (53{,}13° + \varphi)$

$\sin \varphi = 0{,}5556 * (\sin 53{,}13° * \cos \varphi + \cos 53{,}13° * \sin \varphi)$

$\sin \varphi = 0{,}5556 * (0{,}8 * \cos \varphi + 0{,}6 * \sin \varphi)$

$\sin \varphi = 0{,}44 * \cos \varphi + 0{,}33 * \sin \varphi \quad | :\cos \varphi$

$\tan \varphi = 0{,}44 + 0{,}33 * \tan \varphi \quad | - 0{,}33 * \tan \varphi$

$0{,}67 * \tan \varphi = 0{,}44 \quad | :0{,}67$

$\tan \varphi = 0{,}6567$ --> $\mathbf{\varphi = 33{,}3°}$