Prüfungsdauer: 150 Minuten

Abschlussprüfung 2007

an den Realschulen in Bayern

R4/R6

Mathematik I **Haupttermin** **Aufgabe A 2**

A 2.0 Der Punkt $A(2\,|\,-1)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Drachenvierecken $AB_nC_nD_n$. Die Diagonalenschnittpunkte $M_n(x\,|\,2x+3)$ der Drachenvierecke $AB_nC_nD_n$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x + 3$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Für die Drachenvierecke $AB_nC_nD_n$ gilt:
$\overline{AM_n} : \overline{M_nC_n} = 2:1$ und $S\, D_nC_nB_n = 90°$.

A 2.1 Zeichnen Sie die Gerade g und die Drachenvierecke $AB_1C_1D_1$ mit $M_1(-4\,|\,y_1)$ und $AB_2C_2D_2$ mit $M_2(2\,|\,y_2)$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8 \leqq x \leqq 7$; $-9 \leqq y \leqq 12$ — 3 P

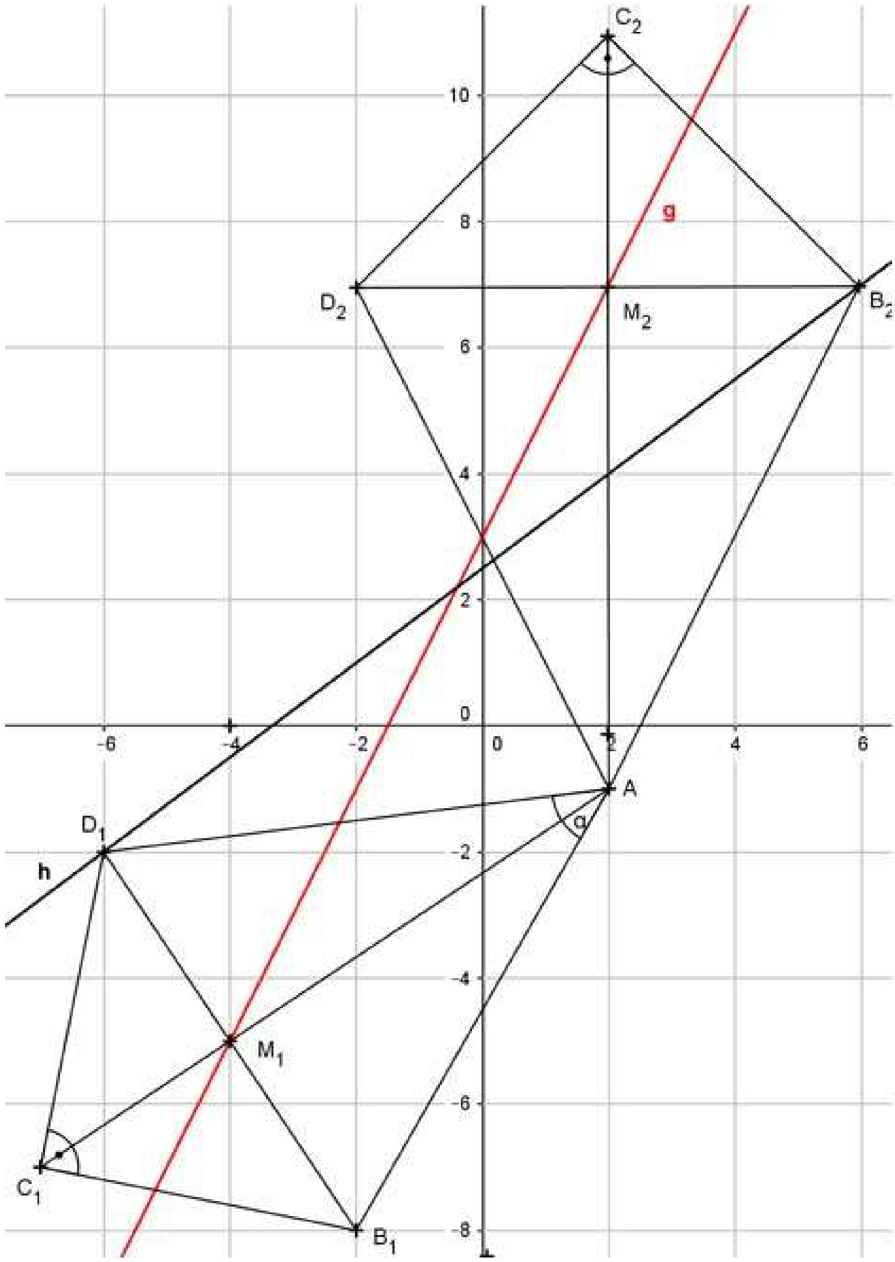
A 2.2 Alle Winkel B_nAD_n haben das gleiche Maß α.
Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. — 2 P

A 2.3 Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte B_n der Drachenvierecke $AB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n.
[Ergebnis: $B_n(2x+2\,|\,1{,}5x+4)$] — 4 P

A 2.4 Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte B_n und zeichnen Sie sodann den Trägergraphen h in das Koordinatensystem zu 2.1 ein. — 3 P

A 2.5 Das Drachenviereck $AB_3C_3D_3$ hat unter den Drachenvierecken $AB_nC_nD_n$ den kleinstmöglichen Flächeninhalt.
Berechnen Sie die Koordinaten des zugehörigen Diagonalenschnittpunkts M_3 und geben Sie den minimalen Flächeninhalt an. — 5 P

2.0, 2.1



2.2

Die Punkte C liegen in der Verlängerung der Strecken AM auf dem Thaleskreis über den Strecken DB. Dreiecke CBM sind gleichschenklig mit BC als Grundseite ---> Die Strecken MC und MB sind gleich lang.
MC = MB = 0,5 * AM

In einem beliebigen Dreieck AMB gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{MB}{AM} = \frac{0{,}5 * AM}{AM} = 0{,}5 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26{,}565° \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 53{,}13°}$$

2.3

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x \\ 2x+3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 \\ 2x+4 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{MB}$ entsteht, indem $\overrightarrow{AM}$ um 90° im Uhrzeigersinn gedreht und um den Faktor 0,5 verkleinert wird.

$\overrightarrow{MB} = 0{,}5 * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x-2 \\ 2x+4 \end{bmatrix} = 0{,}5 * \begin{bmatrix} 2x+4 \\ 2-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ 1-0{,}5x \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \begin{bmatrix} x-2 \\ 2x+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+2 \\ 1-0{,}5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 1{,}5x+5 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OB}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x \\ 1{,}5x+5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\begin{bmatrix} 2x+2 \\ 1{,}5x+4 \end{bmatrix}}$

2.4

Die x'-Koordinate des Trägergraphen h entspricht der x-Koordinate der Punkte B.

$x' = 2x + 2 \mid -2$

$x' - 2 = 2x \mid :2$

$$x = \frac{x' - 2}{2}$$

In die y-Koordinate des Punktes B eingesetzt:

$$\boldsymbol{y' =} 1{,}5 * \left(\frac{x' - 2}{2}\right) + 4 = 0{,}75x - 1{,}5 + 4 = \boldsymbol{0{,}75x + 2{,}5}$$

2.5

Der Flächeninhalt der Dreiecke ADB ist doppelt so groß wie der der Dreiecke AMB, weil bei gleicher Grundseite BD die Höhe doppelt so groß ist.:

Berechnung mit einer Determinante aus den Vektoren $\overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{MC}$:

$\overrightarrow{MC} = 0{,}5 * \overrightarrow{AM} = 0{,}5 * \begin{bmatrix} x-2 \\ 2x+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5x-1 \\ x+2 \end{bmatrix}$

$A_{DBC} = 2 * 0{,}5 * \begin{bmatrix} 2 + x & 0{,}5x - 1 \\ 1 - 0{,}5x & x+2 \end{bmatrix}$

$A_{DBC} = (2 + x) * (x + 2) - (0{,}5x - 1) * (1 - 0{,}5x)$

$A_{DBC} = 4 + 4x + x^2 - (- 0{,}25x^2 + x - 1)$

$A_{DBC} = 1{,}25x^2 + 3x + 5$

$A_{Drachen} = 2{,}5x^2 + 6x + 10 + 1{,}25x^2 + 3x + 5$

$A_{Drachen} = 3{,}75x^2 + 9x + 15$

Berechnung des Scheitelpunktes:

$A_{Drachen} = 3{,}75x^2 + 9x + 15 \mid :3{,}75$

$\frac{A_{Drachen}}{3{,}75} = x^2 + 2{,}4x + 4$

$\frac{A_{Drachen}}{3{,}75} = (x + 1{,}2)^2 - 1{,}44 + 4$

$\frac{A_{Drachen}}{3{,}75} = (x + 1{,}2)^2 + 2{,}56 \mid *3{,}75$

$A_{Drachen} = 3{,}75(x + 1{,}2)^2 + 9{,}6$

Für x = - 1,2 hat der Drachen den **minimalen Flächeninhalt von 9,6 FE.**

Koordinaten von **M_3**$(- 1{,}2 \mid 2 * (-1{,}2) + 3 = 0{,}6)$ = **(-1,2|0,6)**