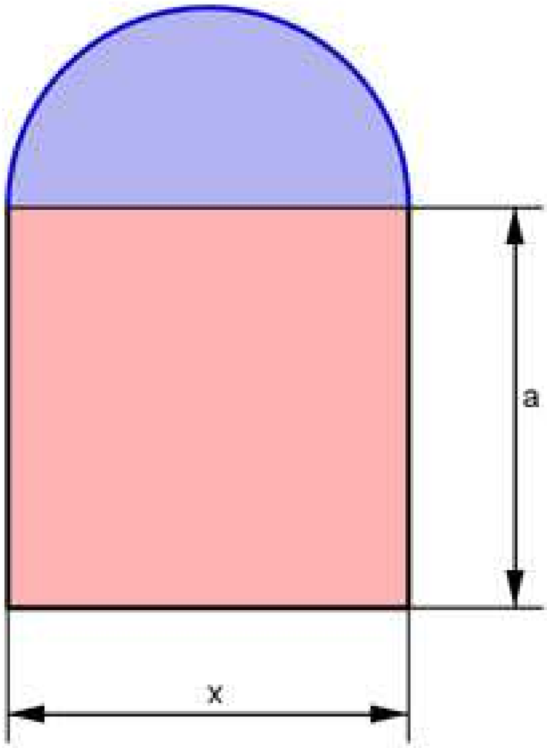
Quadratische Funktionen Aufgabe 129

Das Fenster hat einen Umfang von U = 6 m. Wie groß muss man x wählen, damit die Fläche am größten wird?



Rote Fläche = x cm * a cm

Radius des Kreisbogens = x/2

$$\text{Blaue Fläche} = \frac{(x/2)^2 * \pi}{2} = \frac{x^2 * \pi}{8}$$

$$\text{Umfang des Halbkreisbogens} = \frac{x * \pi}{2}$$

$$U = x + 2 * a + \frac{x * \pi}{2} \quad | -x$$

$$U - x = 2a + \frac{x * \pi}{2} \quad | - \frac{x * \pi}{2}$$

$$U - x - \frac{x \cdot \pi}{2} = 2a \mid :2$$

$$a = \frac{U}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x \cdot \pi}{4}$$

$$a = 3 - x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Gesamtfläche $A_{(x)} = x \cdot \left(3 - x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{x^2 \cdot \pi}{8}$

$$A_{(x)} = 3x - x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{x^2 \cdot \pi}{8}$$

$$A_{(x)} = 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \cdot \pi}{4} + \frac{x^2 \cdot \pi}{8}$$

$$A_{(x)} = 3x - \frac{x^2}{2} - 2\,\frac{x^2 \cdot \pi}{8} + \frac{x^2 \cdot \pi}{8}$$

$$A_{(x)} = 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \cdot \pi}{8}$$

$$A_{(x)} = 3x - x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$A_{(x)} = - x^2\left(\frac{4 + \pi}{8}\right) + 3x = - 0{,}8925\, x^2 + 3x$$

Dies ist die Funktionsgleichung einer nach unten geöffneten, gestauchten Parabel, deren höchster Punkt der Scheitelpunkt ist.

$$A_{(x)} = - x^2\left(\frac{4 + \pi}{8}\right) + 3x \mid :\left(- \frac{4 + \pi}{8}\right)$$

$$-\frac{8A_{(x)}}{4+\pi} = x^2 - \frac{24x}{4+\pi}$$

Quadratische Ergänzung:

$$-\frac{8A_{(x)}}{4+\pi} = x^2 - \frac{24x}{4+\pi} + \left(\frac{12}{4+\pi}\right)^2 - \left(\frac{12}{4+\pi}\right)^2$$

mit $x^2 - \frac{24x}{4+\pi} + \left(\frac{12}{4+\pi}\right)^2 = \left(x - \frac{12}{4+\pi}\right)^2$

$$-\frac{8A_{(x)}}{4+\pi} = \left(x - \frac{12}{4+\pi}\right)^2 - \left(\frac{12}{4+\pi}\right)^2 \;\Big|\; :\left(-\frac{8}{4+\pi}\right)$$

$$A(x) = -\frac{4+\pi}{8}\left(x - \frac{12}{4+\pi}\right)^2 + \frac{144}{(4+\pi)^2} * \frac{4+\pi}{8}$$

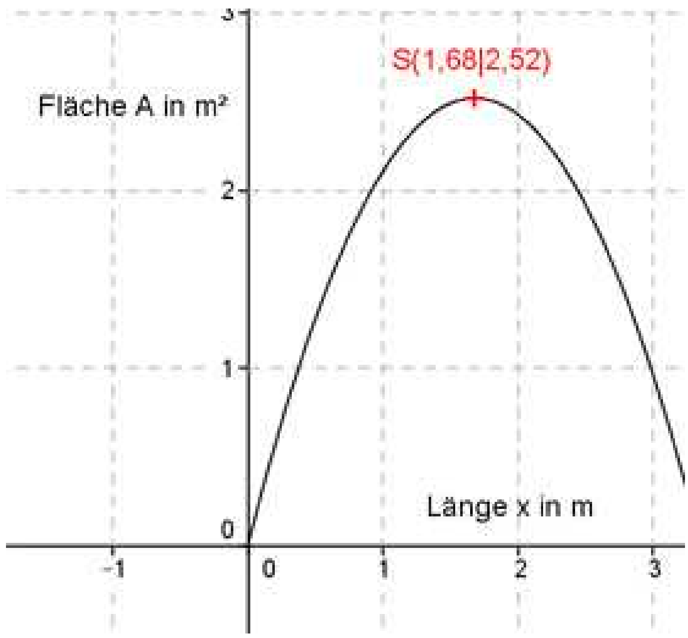
$$A(x) = -\frac{4+3\pi}{8}\left(x - \frac{12}{4+\pi}\right)^2 + \frac{18}{4+\pi}$$

Scheitelpunkt abgelesen: $S\left(\frac{12}{4+\pi} \middle| \frac{18}{4+\pi}\right)$

Scheitelpunkt abgelesen: S(1,68|2,52)

Die Scheitelpunktkoordinaten bedeuten:

Ist die Länge **x = 1,68 m** entsteht die größte Fläche A = 2,52 m².



S(1,68|2,52)
Fläche A in m²
Länge x in m
3
2
1
0
-1
0
1
2
3