

Steckbriefaufgaben Aufgabe 103

Von einer ganzrationalen Funktion 4. Grades sind bekannt: $f(0) = 0$, $f(5) = 125$, $f'(1) = 55$, $f''(0) = 90$ und $f'''(0) = -78$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 4. Grades:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$f'''(x) = 24ax + 6b$$

5 Bedingungen:

$$1. f(0) = 0 \rightarrow a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0 \rightarrow e = 0$$

$$2. f(5) = 125 \text{ (e = 0 eingesetzt)} \rightarrow$$

$$a \cdot 5^4 + b \cdot 5^3 + c \cdot 5^2 + d \cdot 5 = 125 \rightarrow$$

$$625a + 125b + 25c + 5d = 125 \quad \text{I}$$

$$3. f'(1) = 55 \rightarrow 4a \cdot 1^3 + 3b \cdot 1^2 + 2c \cdot 1 + d = 55 \rightarrow$$

$$4a + 3b + 2c + d = 55 \quad \text{II}$$

$$4. f''(0) = 90 \rightarrow 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 90 \rightarrow 2c = 90 \mid :2$$

$$\rightarrow c = 45$$

$$5. f'''(0) = -78 \rightarrow 24a \cdot 0 + 6b = -78 \rightarrow 6b = -78 \mid :6 \rightarrow b = -13$$

$b = -13$ und $c = 45$ in I eingesetzt:

$$625a + 125 \cdot (-13) + 25 \cdot 45 + 5d = 125$$

$$625a - 1625 - 1125 + 5d = 125$$

$$625a - 500 + 5d = 125 \mid +500$$

$$625a + 5d = 625 \quad \text{III}$$

$b = -13$ und $c = 45$ in II eingesetzt:

$$4a + 3 * (-13) + 2 * 45 + d = 55$$

$$4a - 39 + 90 + d = 55$$

$$4a + 51 + d = 55 \quad | -51$$

$$4a + d = 4 \quad \text{IV}$$

$$\text{IV} * (-5) + \text{III}$$

$$- 20a - 5d = - 20$$

$$\underline{625a + 5d = 625}$$

$$605a = 605 \quad | :605$$

$$a = 1$$

$a = 1$ und $b = - 13$ und $c = 45$ in II eingesetzt:

$$4a + 3b + 2c + d = 55$$

$$4 * 1 + 3 * (-13) + 2 * 45 + d = 55$$

$$4 - 39 + 90 + d = 55$$

$$55 + d = 55 \quad | -55$$

$$d = 0$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = x^4 - 13x^3 + 45x^2}$$

