

Steckbriefaufgaben Aufgabe 109

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 6. Grades geht durch die Punkte $(-1|4)$ und $(2|49)$, hat in $(0|1)$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente und in $(1|0)$ einen Tiefpunkt. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 6. Grades:

$$f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

$$f'(x) = 6ax^5 + 5bx^4 + 4cx^3 + 3dx^2 + 2ex + f$$

$$f''(x) = 30ax^4 + 20bx^3 + 12cx^2 + 6dx + 2e$$

7 Bedingungen :

1. Hat in $(0|1)$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Sattelpunkt) bedeutet erstens:

$$f(0) = 1 \rightarrow a \cdot 0^6 + b \cdot 0^5 + c \cdot 0^4 + d \cdot 0^3 + e \cdot 0^2 + f \cdot 0 + g = 1$$

$$\rightarrow g = 1$$

2. Hat in $(0|1)$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Sattelpunkt) bedeutet zweitens:

$$f'(0) = 0 \rightarrow 6a \cdot 0^5 + 5b \cdot 0^4 + 4c \cdot 0^3 + 3d \cdot 0^2 + 2e \cdot 0 + f = 0$$

$$\rightarrow f = 0$$

3. Hat in $(0|1)$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Sattelpunkt) bedeutet drittens:

$$f''(0) = 0 \rightarrow 30a \cdot 0^4 + 20b \cdot 0^3 + 12c \cdot 0^2 + 6d \cdot 0 + 2e = 0 \rightarrow$$

$$2e = 0 \quad | :2 \rightarrow e = 0$$

4. Geht durch den Punkt $(-1|4)$ bedeutet: ($e = 0$ und $f = 0$ und $g = 1$ eingesetzt)

$$f(-1) = 4 \rightarrow a \cdot (-1)^6 + b \cdot (-1)^5 + c \cdot (-1)^4 + d \cdot (-1)^3 + 1 = 4 \rightarrow$$

$$a - b + c - d + 1 = 4 \quad | -1$$

$$a - b + c - d = 3 \quad \quad \quad \text{I}$$

5. Geht durch den Punkt (2|49) bedeutet: (e = 0 und f = 0 und g = 1 eingesetzt)

$$f(2) = 49 \rightarrow a * 2^6 + b * 2^5 + c * 2^4 + d * 2^3 + 1 = 49 \rightarrow$$

$$64a + 32b + 16c + 8d + 1 = 49 \quad | -1$$

$$64a + 32b + 16c + 8d = 48 \quad \text{II}$$

6. Hat in (1|0) einen Tiefpunkt bedeutet zum einen: (e = 0 und f = 0 und g = 1 eingesetzt)

$$f(1) = 0 \rightarrow a * 1^6 + b * 1^5 + c * 1^4 + d * 1^3 + 1 = 0 \rightarrow$$

$$a + b + c + d + 1 = 0 \quad | -1$$

$$a + b + c + d = -1 \quad \text{III}$$

7. Hat in (1|0) einen Tiefpunkt bedeutet zum anderen: (e = 0 und f = 0 eingesetzt)

$$f'(1) = 0 \rightarrow 6a * 1^5 + 5b * 1^4 + 4c * 1^3 + 3d * 1^2 = 0 \rightarrow$$

$$6a + 5b + 4c + 3d = 0 \quad \text{IV}$$

$$\text{I} + \text{III}$$

$$a - b + c - d = 3$$

$$\underline{a + b + c + d = -1}$$

$$2a + 2c = 2 \quad \text{V}$$

$$\text{I} * 8 + \text{II}$$

$$8a - 8b + 8c - 8d = 24$$

$$\underline{64a + 32b + 16c + 8d = 48}$$

$$72a + 24b + 24c = 72 \quad \text{VI}$$

$$\text{III} * (-3) + \text{IV}$$

$$-3a - 3b - 3c - 3d = 3$$

$$\underline{6a + 5b + 4c + 3d = 0}$$

$$3a + 2b + c = 3 \quad \text{VII}$$

$$\text{VI} + \text{VII} * (-12)$$

$$72a + 24b + 24c = 72$$

$$\underline{-36a - 24b - 12c = -36}$$

$$36a + 12c = 36 \quad \text{VIII}$$

$$V * (-6) + VIII$$

$$-12a - 12c = -12$$

$$\underline{36a + 12c = 36}$$

$$24a = 24 \quad | :24$$

$$a = 1$$

a = 1 in V eingesetzt:

$$2 * 1 + 2c = 2$$

$$2 + 2c = 2 \quad | -2$$

$$2c = 0 \quad | :2$$

$$c = 0$$

a = 1 und c = 0 in VII eingesetzt:

$$3 * 1 + 2b + 0 = 3$$

$$3 + 2b = 3 \quad | -3$$

$$2b = 0 \quad | :2$$

$$b = 0$$

a = 1 und c = 0 und b = 0 in III eingesetzt:

$$1 + 0 + 0 + d = -1$$

$$1 + d = -1 \quad | -1$$

$$d = -2$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = x^6 - 2x^3 + 1}$$

