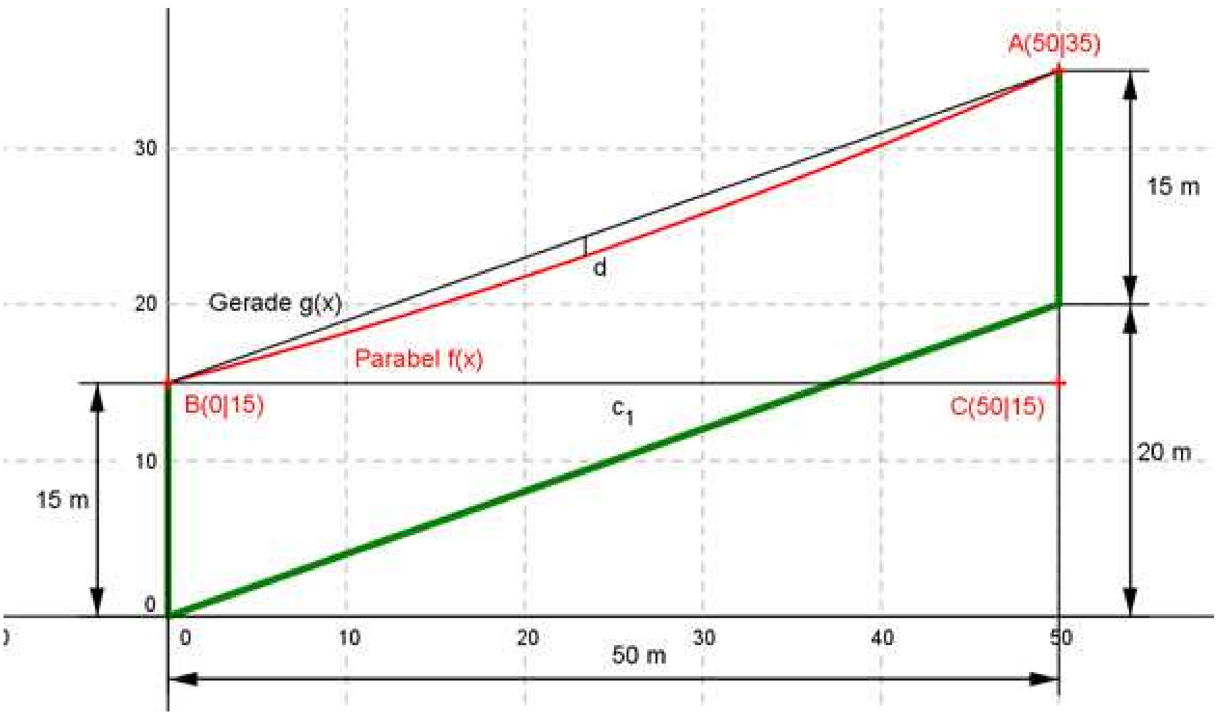
Steckbriefaufgaben Aufgabe 125

Das Tragseil (rot) einer Seilbahn hängt zwischen den Masten (grün) in Parabelform durch. Es hat im Punkt A die Steigung 0,5. Wie groß ist die maximale Durchhängung d?



Allgemeine Form einer Funktionsgleichung 2. Grades:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

3 Bedingungen:

1. Geht durch den Punkt (0|15) bedeutet:

$f(0) = 15 \rightarrow a * 0^2 + b * 0 + c = 15 \rightarrow c = 15$

2. Geht durch den Punkt (50|35) bedeutet: (c = 15 eingesetzt)

$f(50) = 35 \rightarrow a * 50^2 + b * 50 + 15 = 35 \rightarrow$

$2500a + 50b + 15 = 35 \mid -15$

$2500a + 50b = 20 \qquad \text{I}$

3. Hat im Punkt (50|35) die Steigung 0,5 bedeutet:

$f'(50) = 0{,}5 \dashrightarrow 2a * 50 + b = 0{,}5 \dashrightarrow 100a + b = 0{,}5$ II

II * (-50) + I

$- 5000a - 50b = - 25$
$\underline{\ \ 2500a + 50b = 20}$
$- 2500a = - 5 \mid :(-2500)$

$a = 0{,}002$

$a = 0{,}002$ in II eingesetzt:

$100 * 0{,}002 + b = 0{,}5$

$0{,}2 + b = 0{,}5 \mid -0{,}2$

$b = 0{,}3$

$f(x) = 0{,}002x^2 + 0{,}3x + 15$

Berechnung der Geradengleichung $g(x) = mx + b$:

Sie geht durch die Punkte $P_1(0|15)$ und $P_2(50|35)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{35 - 15}{50 + 0} = \frac{20}{50} = 0{,}4$$

b = Schnittpunkt mit der y-Achse = 15

$g(x) = 0{,}4x + 15$

Differenzfunktion:

$d(x) = g(x) - f(x) = 0{,}4x + 15 - (0{,}002x^2 + 0{,}3x + 15)$

$d(x) = 0{,}4x + 15 - 0{,}002x^2 - 0{,}3x - 15$

$d(x) = - 0{,}002x^2 + 0{,}1x$

Maximum von d(x) bestimmen:

$d'(x) = - 0{,}004x + 0{,}1 = 0 \mid -0{,}1$

$- 0{,}004x = - 0{,}1 \mid :(-0{,}004)$

$x = 25$ m

Das heißt, die maximale Durchhängung d tritt genau in der Mitte zwischen den beiden Masten auf und beträgt:

$d_{(25)} = - 0,002 * 25^2 + 0,1 * 25 = - 1,25 + 2,5 = 1,25$ m